

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

Е. А. Фанина

Утверждено
научно-методическим советом
университета

ЗАЩИТА ОТ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ИЗЛУЧЕНИЙ

Учебное пособие
для студентов направления бакалавриата 20.03.01 –
Техносферная безопасность и 28.03.02 - Наноинженерия

Белгород
2017

УДК 504
ББК 20.1я73
Ф21

Фанина, Е.А.

Ф21 Защита от высокоэнергетических излучений: учеб. пособие /
Е. А. Фанина. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2017.– 118 с.

В учебном пособии изложена теория электромагнитного поля и основы техники СВЧ, примеры использования основных уравнений и законов при описании электромагнитных полей.

Учебное пособие предназначено для студентов направления бакалавриата 20.03.01 – Техносферная безопасность 28.03.02 Наноинженерия

УДК 504
ББК 20.1я73

© Белгородский государственный
технологический университет
(БГТУ) им. В. Г. Шухова, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----|
| ВВЕДЕНИЕ | 4 |
| ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ | 5 |
| 1.1 Общая характеристика электромагнитного поля | 5 |
| 1.2 Уравнения Максвелла и их физический смысл | 14 |
| 1.3 Уравнения непрерывности, Лапласа и Пуассона | 17 |
| 1.4 Уравнение энергетического баланса электромагнитного поля (теорема Умова-Пойнтинга) | 19 |
| 1.5 Законы изменения векторов электромагнитного поля на границе раздела двух сред (граничные условия) | 22 |
| 1.6 Примеры использования основных уравнений и законов при описании электромагнитных полей | 28 |
| Вопросы для самопроверки | 37 |
| ГЛАВА 2 ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ | 39 |
| 2.1 Общие свойства и уравнения квазистатических, квазистационарных и стационарных полей | 39 |
| 2.2 Электростатическое поле | 43 |
| 2.3 Электрическое поле постоянного тока | 46 |
| 2.4 Магнитное поле постоянного тока | 49 |
| 2.5 Аналогия между стационарными полями | 52 |
| 2.6 Электрическая ёмкость, собственная и взаимная индуктивность, энергия стационарных полей | 55 |
| 2.7 Примеры анализа стационарных и квазистационарных полей в простейших компонентах электронных цепей | 60 |
| Вопросы для самопроверки | 72 |
| ГЛАВА 3 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ | 73 |
| 3.1 Волновые функции и уравнения | 73 |
| 3.2 Параметры плоской волны в однородной среде | 79 |
| 3.3 Поляризация, отражение и преломление электромагнитных волн | 86 |
| 3.4 Направляемые электромагнитные волны | 91 |
| 3.5 Излучение электромагнитных волн | 102 |
| 3.6 Примеры анализа волновых процессов | 107 |
| Вопросы для самопроверки | 117 |
| Библиографический список | 118 |

ВВЕДЕНИЕ

Закономерности протекания электромагнитных явлений в различных средах и системах (без учёта квантовых эффектов) составляют предмет изучения классической теории поля и прикладной электродинамики (техники СВЧ), которая наглядно иллюстрирует применение основных уравнений при расчёте практических систем электроники и техники, принцип работы которых основан на использовании свойств электромагнитных полей и волн.

В диапазоне СВЧ длина волны становится соизмеримой с размерами элементов цепей. Энергия быстропеременных токов в проводниках всё более интенсивно излучается в окружающее пространство в виде электромагнитных волн. Если проводники являются элементами антенн, то излучение электромагнитной энергии в окружающее пространство полезно и используется для передачи информации. В радиотехнических же системах за счёт излучения происходит увеличение потерь энергии, и возникают нежелательные, обычно неконтролируемые связи между элементами. Следовательно, при переходе к диапазону СВЧ конструкции элементов схем должны быть изменены так, чтобы потери энергии за счёт излучений сводились к минимуму.

В данном пособии излагаются причины возникновения электромагнитных помех, способы защиты конструкций от электростатических, магнитных, электромагнитных полей. Большое внимание уделено физическим явлениям, на основе которых осуществляются экранирование и защита элементов конструкций микроэлектронных устройств и систем.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1.1 Общая характеристика электромагнитного поля

Электромагнитное поле представляет собой особый вид материи, оказывающей силовое воздействие на заряженные частицы, и определяется как совокупность переменных взаимосвязанных и влияющих друг на друга электрического и магнитного полей. При нарушении данного общего определения в зависимости от вводимых предположений и ограничений различают следующие частные виды электромагнитного поля: электростатическое, электрическое и магнитное постоянного тока, а также квазистационарное и квазистатическое поля.

На электромагнитное поле как на вид материи распространяются понятия, относящиеся к свойствам вещества: инерция, гравитационная масса и энергия, количество движения и момент количества движения.

Электромагнитное поле является носителем гравитационной массы, что подтверждается искривлением светового луча в поле тяготения Солнца, замеченным во время солнечного затмения (1919), а также тем, что энергия (скорость) луча увеличивается при движении вниз к Земле и уменьшается при движении вверх от Земли (опыт Пандау, 1960).

Электромагнитное поле обладает энергией, так как при взаимодействии с заряженными частицами их энергия изменяется и, следовательно, передаётся электромагнитному полю и наоборот. Движение энергии электромагнитного поля количественно оценивается вектором Пойнтинга (см. п.1.4).

В настоящем пособии рассматривается макроскопическая теория электромагнитного поля, которая не учитывает дискретного распределения электрических зарядов в веществе, считая вещественную среду сплошной. При таком предположении для характеристики макроскопического поля используют усреднённые значения микроскопических величин в бесконечно малом объёме, вводя четыре основных вектора:

- \vec{E} – напряжённости электрического поля;
- \vec{D} – электрического смещения (индукции);
- \vec{H} – напряжённости магнитного поля;
- \vec{B} – магнитной индукции.

Напряжённость электрического поля \vec{E} является силовой характеристикой электрического поля, которая показывает, какая сила \vec{F} действует на единичный точечный заряд q , помещённый в это поле, т.е. $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$.

Если в электрическое поле \vec{E} поместить диэлектрик, то внутри него будет происходить *поляризация* (отрицательно заряженные электроны будут двигаться к положительному источнику электрического поля, положительно заряженные ионы – к отрицательному, создавая, таким образом, дополнительное внутреннее электрическое поле). Заряды, участвующие в поляризации диэлектрика, являются связанными. Силовые линии электрического поля \vec{E} начинаются и заканчиваются на свободных и связанных зарядах (рис. 1.1).

Из рис. 1.1 видно, что некоторые силовые линии вектора \vec{E} (сплошные линии) на границе раздела претерпевают скачкообразное изменение, создавая тем самым неудобства при расчете электростатических полей. Поэтому вводится вектор, который бы не изменялся на всём протяжении между электродами

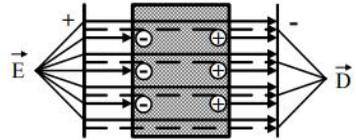


Рисунок 1.1 – Общая схема поляризации диэлектрика

Линии такого вектора (*вектора электрического смещения* \vec{D}) начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах (см. рис. 1.1, пунктирная линия). Таким образом, **вектор электрического**

смещения \vec{D} начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах (см. рис. 1.1, пунктирная линия). Таким образом, вектор электрического смещения \vec{D} равен сумме векторов внешнего электрического поля $\vec{D}_{\text{вакуума}}$ и поля, создаваемого зарядами вещества \vec{P} , называемого **вектором поляризованности**.

С учетом этого можно записать

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{D}_{\text{вакуума}} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi^{\text{э}} \vec{E} = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\chi^{\text{э}}}{\varepsilon_0} \right) \vec{E} = \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E},\end{aligned}\tag{1.1}$$

где ε_0 - диэлектрическая постоянная ($\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ Ф / м}$);

$\chi^{\text{э}}$ - электрическая восприимчивость вещества (поляризуемость);

$\varepsilon = 1 + \frac{\chi^{\text{э}}}{\varepsilon_0}$ - относительная диэлектрическая проницаемость веще-

ства ($\varepsilon \geq 1$);

$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$ - абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества.

Из формулы (1.1) видно, что при постоянном значении \vec{D} в вакууме и в диэлектрике увеличение относительной диэлектрической проницаемости ε приводит к уменьшению напряжённости электрического поля в диэлектрике. Поэтому с физической точки зрения **относительная диэлектрическая проницаемость вещества ε показывает, во сколько раз электрическое поле в веществе меньше электрического поля в вакууме,**

$$\text{т.е. } \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

Аналогичные рассуждения можно привести и для магнитного поля. Если по проводнику пропустить ток I , то вокруг него создаётся магнитное поле с **напряжённостью \vec{H}** . При помещении в это поле магнетика (вещества, способного под действием магнитного поля приобретать магнитный момент) оно будет намагничиваться (орбитальные электроны, вращаясь вокруг ядер, создают магнитные моменты, которые направлены либо вдоль внешнего поля, либо против поля, формируя, таким образом, своё внутреннее магнитное поле). Тогда магнитное поле внутри вещества \vec{B} (**вектор магнитной индукции**) равно сумме внешнего магнитного поля (поля, созданного макроточками)

$\vec{B}_{\text{вакуума}}$ и внутреннего магнитного поля (поля, созданного микро-токами), описываемого с помощью **вектора намагниченности** \vec{M} .

С учётом этого можно записать

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_{\text{вакуума}} + \vec{B}_{\text{внутреннее}} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \\ \mu_0 \chi^M \vec{H} &= \mu_0 (1 + \chi^M) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_a \vec{H},\end{aligned}\quad (1.2)$$

где μ_0 - магнитная постоянная

$$(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 1,256 \times 10^{-6} \text{ Гн} / \text{м}^2);$$

χ^M - магнитная восприимчивость вещества;

$\mu = 1 + \chi^M$ - относительная магнитная проницаемость вещества;

$\mu_a = \mu_0 \mu$ - абсолютная магнитная проницаемость вещества.

С физической точки зрения **относительная магнитная проницаемость вещества** μ показывает, во сколько раз магнитное поле в веществе больше (для парамагнетиков $\mu > 1$ и ферромагнетиков $\mu \gg 1$) или меньше (для диамагнетиков $\mu < 1$) магнитного поля в вакууме, т.е. $\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}$.

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}.$$

Уравнения (1.1) и (1.2) называют **материальными уравнениями**.

С другой стороны, если в магнитное поле поместить проводник с током, то на него будет действовать сила Ампера. Поэтому **магнитная индукция** \vec{B} является силовой характеристикой магнитного поля, которая показывает, какая сила \vec{F}_A действует на элемент проводника $d\vec{l}$ с током I (т.е. на движущиеся заряды), помещенный в это поле (закон Ампера $d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}]$).

Если поле не изменяется со временем, то такое поле называется **стационарным**. При описании стационарных электрических полей, которые являются **потенциальными** ($\text{rot} \vec{E} = 0$), вводится понятие скалярного электрического потенциала φ , связанного с вектором \vec{E} через соотношение [3]:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi, \quad (1.3)$$

Потенциал φ является энергетической характеристикой электрического поля, которая показывает, какую потенциальную энергию имеет единичный положительный заряд в данной точке.

Для стационарного магнитного поля $\text{rot}\vec{H} = \vec{\delta}$ (см. п.2.1). Такое поле является *вихревым*. Однако для совокупности точек, в которых плотность тока $\vec{\delta} = 0$, $\text{rot}\vec{H} = 0$ и магнитное поле можно рассматривать как потенциальное, которое имеет скалярный магнитный потенциал φ_m . Следовательно, для таких областей можно записать

$$\vec{H} = -\text{grad}\varphi_m. \quad (1.4)$$

Для расчета магнитных полей широко используется **также векторный потенциал магнитного поля** \vec{A} , который связан с \vec{B} выражением

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (1.5)$$

Основанием для представления индукции \vec{B} в виде ротора от векторного потенциала \vec{A} служит то, что при подстановке (1.5) в четвертое уравнение Максвелла (см. п.1.2) выполняется условие соленоидальности магнитного поля $\text{div}\vec{B} = \text{divrot}\vec{A} \equiv 0$.

Для проводящей среды плотность тока $\vec{\delta}$ линейно зависит от напряжённости электрического поля \vec{E} в каждой её точке. Эта зависимость описывается **законом Ома в дифференциальной форме** (см. п.2.3):

$$\vec{\delta} = \gamma\vec{E}, \quad (1.6)$$

где коэффициент пропорциональности γ называется удельной электрической проводимостью среды и имеет размерность $(\text{Ом}\times\text{м})^{-1}$.

Уравнение (1.6) дополняет уравнения (1.1) и (1.2) при использовании связей векторов электромагнитного поля через параметры материальных сред для решения уравнений Максвелла.

Свойства электромагнитных полей в значительной мере определяются **типами сред**, которые условно можно классифицировать следующим образом:

- *однородные* – параметры среды $(\varepsilon_a, \mu_a, \gamma)$ одинаковы во всех точках;

- *неоднородные* – параметры среды $(\varepsilon_a, \mu_a, \gamma)$ меняются от точки к точке;

- *изотропные* – соотношения между парами векторов \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} , $\vec{\delta}$ и \vec{E} связаны линейной зависимостью, т.е. параметры среды $(\varepsilon_a, \mu_a, \gamma)$ являются скалярными величинами;

- *анизотропные* – соотношения между парами векторов \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} , $\vec{\delta}$ и \vec{E} зависят от их ориентации, т.е. параметры среды $(\varepsilon_a, \mu_a, \gamma)$ являются тензорами;

- *линейные* – свойства среды $(\varepsilon_a, \mu_a, \gamma)$ не зависят от величины поля \vec{E} или \vec{H} ;

- *нелинейные* – свойства среды $(\varepsilon_a, \mu_a, \gamma)$ зависят от интенсивности поля \vec{E} или \vec{H} .

В дальнейшем, для упрощения математических выкладок и наглядности представления физических процессов, будут рассмотрены уравнения, характеризующие поля в однородных, изотропных и линейных средах.

Для наглядного графического представления электрического и магнитного полей вводятся понятия силовых и эквипотенциальных линий (эквипотенциальных поверхностей).

Силовая линия – это мысленно проведенная в поле линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора напряжённости электрического поля \vec{E} либо вектора магнитной индукции \vec{B} . Силовые линии электрического поля начинаются на положительно заряженном теле и оканчиваются на отрицательно заряженном теле, что следует из уравнения Максвелла $\text{div } \vec{D} = \rho$ (см. п.1.2). Условно вдоль силовой линии мог бы передвигаться весьма малый положительный заряд, если бы он имел возможность свободного

безынерционного перемещения в поле. *Силловые линии магнитного поля* замкнуты сами на себя, так как $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (см. п.1.2).

Под *эквипотенциальной* (равнопотенциальной) *поверхностью* понимают *совокупность точек поля, имеющих один и тот же потенциал*. Если мысленно рассечь статическое поле какой-либо секущей плоскостью, то в полученном сечении будут видны следы пересечения плоскости с эквипотенциальными поверхностями. Их *называют эквипотенциальными линиями* (или эквипотенциалами). Таким образом, *эквипотенциальными* называются *линии* поля, на которых потенциал не изменяется. Эквипотенциальные и силловые линии в любой точке поля пересекаются под прямым углом.

Эквипотенциальные линии стационарного электрического поля замкнуты (так как $\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rotgrad} \varphi \equiv 0$).

Эквипотенциальные линии стационарного магнитного поля при $\vec{\delta} = 0$ ($\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rotgrad} \varphi_m \equiv 0$) начинаются и заканчиваются на токах (аналогично, как и силловые линии электрического поля начинаются и заканчиваются на зарядах). Пример распределения силловых и эквипотенциальных линий для электрического поля точечного заряда и магнитного поля проводника с током показан на рис. 1.2.

Из рис. 1.2 видно, что силловым линиям электростатического поля отвечают эквипотенциальные линии магнитного поля, а эквипотенциалам электростатического поля - силловые линии магнитного поля.

В заключение данного подраздела сформулируем некоторые теоремы и принципы, которые являются общими при решении многих задач теории электромагнетизма.

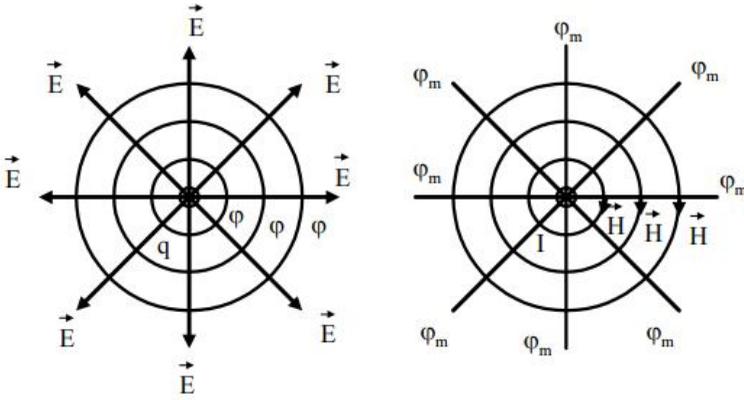


Рисунок 1.2 – Силовые и эквипотенциальные линии электрического и магнитного потенциалов

Интегральные теоремы применяются при переходе от уравнений поля, записанных в интегральной форме, к уравнениям поля в дифференциальной форме и наоборот.

Теорема Остроградского-Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{K} dV = \int_S \vec{K} \vec{dS} \quad (1.7)$$

устанавливает соотношение между интегралом дивергенции вектора \vec{K} по объему V и поверхностным интегралом, взятым по замкнутой поверхности S , ограничивающей этот объем. При этом ограничивающая поверхность должна быть кусочно-гладкой, а вектор на этой поверхности – непрерывным. Положительной является внешняя нормаль \vec{dS} .

Теорема Стокса

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{K} \vec{dS} = \oint_l \vec{K} \vec{dl} \quad (1.8)$$

Приравняет поверхностный интеграл ротора вектора \vec{K} к линейному интегралу этого вектора, взятому по замкнутому контуру l , ограничивающему эту поверхность. Вектор \vec{K} должен быть непрерыв-

ным по всему контуру интегрирования, а контур кусочно-гладким. Положительное направление нормали к поверхности и направление обхода связаны правилом правого винта.

Теорема единственности (однозначного) решения справедлива для постоянных и переменных электромагнитных полей: *решение, удовлетворяющее уравнениям поля, граничным и начальным условиям, является единственным.* Например, электрическое поле описывается уравнением Лапласа или Пуассона. Оба они являются уравнениями в частных производных. Для уравнений в частных производных в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений допускается в общем случае множество линейно независимых друг от друга решений. В любой же конкретной практической задаче есть единственная картина поля, т.е. единственное решение. Из множества линейно независимых решений, допускаемых уравнением Лапласа – Пуассона, выбор единственного, удовлетворяющего конкретной задаче, производят с помощью граничных условий.

Если есть некоторая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа – Пуассона и граничным условиям в данном поле, то эта функция и представляет собой то единственное решение конкретной задачи, которое ищут.

Принцип наложения (суперпозиции) применяется для полей, описываемых линейными уравнениями: результирующий вектор (скаляр) равен сумме векторов (скаляров), создаваемых каждым источником в отдельности. Например, n зарядов создают результирующую напря-

жённость электрического поля $\vec{E} = \sum_{k=1}^n \vec{E}_k$.

Принцип двойственности (принцип перестановочной двойственности) справедлив для электростатического, электрического постоянного тока и магнитного постоянного тока полей и основан на аналогии стационарных полей (см. п.2.5): *задачу о расчёте одного поля можно заменить задачей о расчёте другого поля, применив аналогию величин и коэффициентов, характеризующих эти поля, если граничные поверхности обоих полей по форме и взаимному расположению одинаковы, а граничные условия и дифференциальные уравнения подобны относительно величин и коэффициентов, присущих каждому полю.*

1.2 Уравнения Максвелла и их физический смысл

Уравнения Максвелла являются фундаментальными уравнениями электромагнитного поля. *Интегральная форма записи* уравнений устанавливает связь между величинами в разных точках или на разных отрезках, поверхностях. *Дифференциальная форма записи* описывает соотношение между величинами вблизи одной и той же точки поля в определённый момент времени.

Переход от интегральной формы записи уравнений Максвелла к дифференциальной форме осуществляется с помощью теорем Остроградского-Гаусса (1.7) и Стокса (1.8).

Существует *четыре уравнения Максвелла*:

Первое уравнение Максвелла (закон полного тока):

$$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \oint_s \bar{\delta} d\bar{S} + \frac{d}{dt} \oint_s \bar{D} d\bar{S}, \quad (1.9)$$

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{\delta} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}.$$

Физический смысл: вихревое магнитное поле \bar{H} создается током проводимости $i_{\text{пров}} = \oint_s \bar{\delta} d\bar{S}$ и током смещения $i_{\text{см}} = \frac{d}{dt} \oint_s \bar{D} d\bar{S}$, где $\frac{d\bar{D}}{dt}$ – переменное электрическое поле.

Второе уравнение Максвелла (закон электромагнитной индукции):

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \oint_s \bar{B} d\bar{S}, \quad (1.10)$$

$$\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}.$$

Физический смысл: вихревое электрическое поле \bar{E} создается переменным магнитным полем $\frac{d\bar{B}}{dt}$.

Третье уравнение Максвелла (теорема Гаусса):

$$\oint_s \bar{D} d\bar{S} = \int_V \rho_{\text{своб}} dV = \sum q_{\text{своб}}. \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб.}}$$

Физический смысл: силовые линии электрического поля начинаются и заканчиваются на зарядах q .

Четвертое уравнение Максвелла (принцип непрерывности магнитных силовых линий):

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (1.12)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Физический смысл: силовые линии магнитного поля замкнуты.

Для описания гармонически изменяющихся электромагнитных полей (изменяющихся по законам синуса или косинуса) удобно использовать *уравнения Максвелла в комплексной форме записи*. Представим векторы электромагнитного поля на комплексной плоскости в следующем виде (в качестве примера рассмотрен вектор \vec{E}):

$$\dot{\vec{E}} = E_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}, \quad (1.13)$$

где E_m - амплитуда поля;

φ - фаза поля;

$\omega = 2\pi f$ - круговая частота;

t - временная координата;

j - комплексная единица.

Тогда

$$\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega \dot{\vec{E}}.$$

С учетом этого можно записать первое уравнение Максвелла в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\delta} + j\omega \dot{\vec{D}} = \gamma \dot{\vec{E}} + j\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}} = (\gamma + j\omega \varepsilon_a) \dot{\vec{E}} =$$

$$= j\omega \left(\varepsilon_a + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{\vec{E}} = j\omega \varepsilon_a \left(1 - \frac{j\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right) \dot{\vec{E}} = j\omega \varepsilon_{ka} \dot{\vec{E}},$$

где $\varepsilon_{ka} = \varepsilon_a \left(1 - \frac{j\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)$ - **комплексная диэлектрическая проницаемость**, которая не имеет физического смысла, а вводится для удобства

и симметрии представления уравнений Максвелла.

Часто мнимую часть в выражении для комплексной диэлектрической проницаемости заменяют тангенсом угла диэлектрических потерь $tg\delta$:

$$tg\delta = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} = \frac{\gamma E}{\omega \varepsilon_a E} = \frac{\delta_{пров}}{\delta_{см}}$$

Таким образом, **тангенс угла диэлектрических потерь** $tg\delta$ равен отношению плотности тока проводимости в среде к плотности тока смещения. Тогда

$$\varepsilon_{ka} = \varepsilon_a (1 - jtg\delta).$$

Значения $tg\delta$ для различных веществ приводятся в справочниках. Величина тангенса диэлектрических потерь может служить основанием для характеристики веществ. Так, если $tg\delta \ll 1$, то вещество – хороший проводник.

С учётом представления остальных векторов поля в виде (1.13) **уравнения Максвелла в комплексной форме** запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} rot \dot{\vec{H}} &= \dot{\vec{\delta}} + j\omega \dot{\vec{D}} = j\omega \varepsilon_{ka} \dot{\vec{E}}; \\ rot \dot{\vec{E}} &= -j\omega \dot{\vec{B}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}; \\ div \dot{\vec{D}} &= \dot{\rho}; \\ div \dot{\vec{B}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Уравнения Максвелла в комплексной форме записи *физического* смысла не имеют.

Обобщая вышеизложенное, система уравнений Максвелла в трех формах записи будет иметь следующий вид (табл. 1.1):

Таблица 1.1 – Система уравнений Максвелла в трех формах записи

| Интегральная | Дифференциальная | Комплексная |
|--|--|---|
| $\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \oint_s \vec{\delta} \vec{dS} + \frac{d}{dt} \oint_s \vec{D} \vec{dS}$ | $rot \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ | $rot \dot{\vec{H}} = j\omega \varepsilon_{ka} \dot{\vec{E}};$ |
| $\oint_l \vec{E} \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \oint_s \vec{B} \vec{dS}$ | $rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | $rot \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}$ |

| Интегральная | Дифференциальная | Комплексная |
|--|--|----------------------------------|
| $\oint_S \bar{D} dS = \int_V \rho_{своб} dV = \sum q_{своб}$ | $div \operatorname{div} \bar{D} = \rho_{своб}$ | $div \dot{\bar{D}} = \dot{\rho}$ |
| $\oint_S \bar{B} dS = 0$ | $div \bar{B} = 0$ | $div \dot{\bar{B}} = 0$ |

Обычно система уравнений Максвелла дополняется материальными уравнениями (1.1), (1.2) и законом Ома (1.6):
 $\bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \bar{E} = \varepsilon_a \bar{E}, \bar{B} = \mu_0 \mu \bar{H} = \mu_a \bar{H}, \bar{\delta} = \gamma \bar{E}.$

1.3 Уравнения непрерывности, Лапласа и Пуассона

Уравнение непрерывности (закон сохранения заряда) выводится из первого уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}.$$

Применим оператор div ко всем членам этого уравнения. Получим

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{H} = \operatorname{div} \bar{\delta} + \operatorname{div} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}. \text{ Так как } \operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0, \text{ то } \operatorname{div} \bar{\delta} + \frac{\partial (\operatorname{div} \bar{D})}{\partial t} = 0.$$

С учетом третьего уравнения Максвелла (1.11) можно записать

$$\frac{\partial \rho_{своб}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\delta} = 0. \quad (1.15)$$

Полученное выражение называется **законом сохранения заряда или уравнением непрерывности линий полного тока.**

Для получения закона сохранения заряда в интегральной форме проинтегрируем уравнение (1.15) по объему V . Получим

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho_{своб} dV \right) + \oint_S \bar{\delta} dS = 0. \quad (1.16)$$

Физический смысл этого уравнения: ток проводимости $i_{пров} = \int_S \bar{\delta} dS$

обусловлен движением свободных зарядов $\rho_{своб}$ или заряд не может перемещаться из одной точки в другую, не создав между ними тока.

Уравнения Пуассона и Лапласа для скалярного потенциала φ являются основными дифференциальными уравнениями электростати-

ки. Они следуют из третьего уравнения Максвелла: $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}}$. Так как $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$, а $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, то

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_a}.$$

Оператор $\nabla^2 = \Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ называют *оператором Лапласа или лапласианом*. Поэтому можно записать, что

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_a}. \quad (1.17)$$

Это уравнение называют *уравнением Пуассона*.

Если свободных зарядов $\rho_{\text{своб}}$ нет, то уравнение Пуассона переходит в *уравнение Лапласа*:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (1.18)$$

В *декартовой системе координат* уравнения Пуассона и Лапласа имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_a}; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned}$$

Для цилиндрической и сферической систем координат они представлены в [3].

При получении *уравнения Пуассона для векторного потенциала* \vec{A} запишем первое уравнение Максвелла для стационарного поля: $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$.

Умножив обе части на μ_a и используя материальное уравнение (1.2), получим:

$$\mu_a \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{\delta}.$$

Воспользуемся выражением магнитной индукции через векторный потенциал (1.5). Тогда $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}$.

С учётом того, что $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta^2 \vec{A}$, можно записать

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}.$$

Так как для стационарного поля линии вектора \vec{A} замкнуты сами на себя, то $\operatorname{div}\vec{A}=0$. В итоге получаем уравнение Пуассона для векторного потенциала:

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_a\vec{\delta}. \quad (1.19)$$

1.4 Уравнение энергетического баланса электромагнитного поля (теорема Умова-Пойнтинга)

Кроме уравнений Максвелла и закона сохранения заряда, большое значение в теории электромагнитного поля имеет **теорема Умова-Пойнтинга**, которая описывает энергетические соотношения распределения полей в заданном объёме. Её не сложно получить из уравнений Максвелла.

Для вывода теоремы Умова-Пойнтинга воспользуемся первым и вторым уравнениями Максвелла в дифференциальной форме, записанными с учётом материальных уравнений (1.1), (1.2), (1.6):

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\gamma\vec{E}+\varepsilon_a\frac{\partial\vec{E}}{\partial t};\operatorname{rot}\vec{E}=-\mu_a\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

Домножив почленно первое уравнение Максвелла скалярно на \vec{E} , а второе – на \vec{H} и вычтем из первого уравнения второе уравнении. Получим

$$\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}-\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}=\gamma\vec{E}\vec{E}+\varepsilon_a\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_a\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

С учётом того, что

$$\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}-\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}=\operatorname{div}[\vec{H}\times\vec{E}]=-\operatorname{div}[\vec{E}\times\vec{H}],$$

можно записать

$$-\operatorname{div}[\vec{E}\times\vec{H}]=\gamma E^2+\varepsilon_a\vec{E}\frac{\partial(\vec{E})}{\partial t}+\mu_a\vec{H}\frac{\partial(\vec{H})}{\partial t}.$$

Внеся \vec{E} и \vec{H} под знаки операторов дифференцирования, получим

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}[\vec{E} \times \vec{H}] &= \gamma E^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial(\varepsilon_a E^2)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\mu_a H^2)}{\partial t} = \\
 &= \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

В окончательном виде теорема **Умова-Пойтинга в дифференциальной форме записи** имеет вид

$$-\operatorname{div}[\vec{E} \times \vec{H}] = \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right). \quad (1.20)$$

В (1.20) $\frac{\varepsilon_a E^2}{2}$ представляют собой энергию электрического поля в единице объема, $\frac{\mu_a H^2}{2}$ - энергию магнитного поля в единице объема,

dV , γE^2 - тепловые потери электромагнитной энергии. Для определения энергии во всём объёме проинтегрируем выражение (1.20) по объёму V . С учётом теоремы Остроградского-Гаусса (1.7) *теорема Умова-Пойтинга в интегральной форме* примет вид

$$-\oint_S [\vec{E} \times \vec{H}] \vec{d}S = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (1.21)$$

Векторное произведение $[\vec{E} \times \vec{H}] = \vec{\Pi}$ называют *вектором Пойтинга*, он характеризует значение и направление перемещения энергии, проходящей в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной $\vec{\Pi}$ (рис. 1.3). Если вектор $\vec{\Pi}$ направлен внутрь поверхности, то его поток, проходящей через поверхность, будет положительным: $-\oint_S \vec{\Pi} \vec{d}S > 0$ (при положительном направлении $\vec{d}S$ в сторону внешней нормали к поверхности).

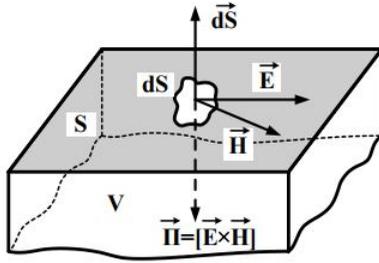


Рисунок 1.3 – Ориентация векторов $\vec{E}, \vec{H}, \vec{P}$ относительно поверхности S , ограничивающей объем V .

Физический смысл теоремы Умова-Пойтинга: энергия электромагнитного поля расходуется на тепловые потери γE^2 и на приращение электрической $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} \right)$ и магнитной $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_a H^2}{2} \right)$ энергий в заданном объёме.

Теорема Умова-Пойтинга в комплексной форме записи используется для описания энергетического баланса гармонических электромагнитных колебаний. При выводе её воспользуемся первым и вторым уравнениями Максвелла (1.14):

$$\text{rot } \dot{H} = \gamma \dot{E} + j\omega \epsilon_a \dot{E}; \quad \text{rot } \dot{E} = -j\omega \mu_a \dot{H}.$$

При нахождении полной мощности необходимо комплекс вектора напряженности электрического поля \dot{E} умножить на сопряженный комплекс вектора напряженности магнитного поля \dot{H} и проделать последовательность операций, изложенных выше при получении уравнения для мгновенных значений. В итоге получим

$$-\text{div } \dot{P} = \gamma E^2 + 2j\omega \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right). \quad (1.22)$$

Для определения энергии во всём объёме проинтегрируем (1.22) по V и применим к левой части теорему Остроградского-Гаусса (1.7):

$$-\oint_S \dot{\vec{P}} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + j2\omega \int_V \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right) dV. \quad (1.23)$$

Первое слагаемое правой части представляет собой активную мощность, второе – реактивную мощность. Таким образом, теорема Умова-Пойтинга в комплексной форме может быть записана и сформулирована следующим образом:

$$-\oint_S \dot{\vec{P}} d\vec{S} = P + jQ,$$

поток комплексного вектора Пойтинга $\dot{\vec{P}}$ сквозь замкнутую поверхность равен комплексной мощности, выделяемой внутри объёма, ограниченного этой поверхностью.

1.5 Законы изменения векторов электромагнитного поля на границе раздела двух сред (граничные условия)

Для областей, содержащих границу раздела двух или более сред, непосредственное решение дифференциальных уравнений Максвелла невозможно. Обычно решают уравнения для каждой среды в отдельности, а полученные решения «сшивают» на границе раздела. Для этого используют так называемые *граничные условия* – соотношения между значениями векторов поля по обе стороны от границы раздела. Поскольку уравнения Максвелла являются векторными, а решения их обычно находятся в проекциях на оси координат, то граничные условия удобно представить в виде нормальной (проекция на оси y) и тангенциальной (проекция на оси x) составляющих (рис. 1.4).

Методика вывода граничных условий базируется на использовании уравнений Максвелла (1.9) – (1.12).

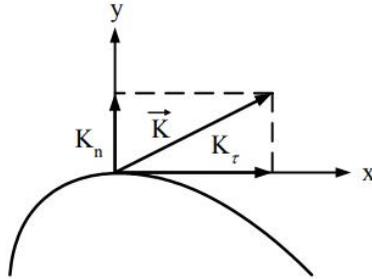


Рисунок 1.4 – Представление вектора \vec{K} в проекциях на оси координат в виде тангенциальной (K_t) и нормальной (K_n) составляющих

Граничные условия для нормальных составляющих поля. Пусть достаточно гладкий элемент поверхности ΔS разделяет две среды 1 и 2 с различными диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 ; в каждой среде параметры ϵ_1 и ϵ_2 постоянны (рис. 1.5).

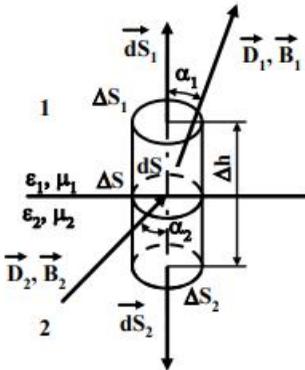


Рисунок 1.5 – Преломление векторов \vec{D} и \vec{B} на границе раздела сред

Обозначим вектор электрической индукции (электрического смещения) в среде 1 через вектор \vec{D}_1 , в среде 2 – через вектор \vec{D}_2 . Построим на плоской границе раздела элемент цилиндра с высотой $\Delta h \rightarrow 0$ и основаниями цилиндра $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$. Векторы \vec{dS}_1 и \vec{dS}_2 будут направлены перпендикулярно основаниям и поверхности раздела ($\vec{dS} = \vec{n} dS$, где \vec{n} - нормаль к поверхности раздела), на которой в общем случае распределён заряд с **поверхностной**

плотностью $\sigma = \frac{dq}{dS}$. Обозначим угол между векторами \overline{D}_1 и $d\overline{S}_1$

через α_1 , между векторами \overline{D}_2 и $d\overline{S}_2$ - через α_2 .

Воспользуемся третьим уравнением Максвелла в интегральной форме (1.11):

$$\oint_S \overline{D} d\overline{S} = \int_V \rho dV = \oint_S \sigma dS.$$

Суммарный интеграл по поверхности цилиндра в левой части будет содержать два интеграла по основаниям и один – по боковой поверхности, который можно исключить с учётом того, что при $\Delta h \rightarrow 0$ площадь боковой поверхности $\Delta S_{бок} \rightarrow 0$. Тогда для выделенного цилиндра

$$\oint_S \overline{D} d\overline{S} = \oint_{\Delta S_1} \overline{D}_1 d\overline{S}_1 + \oint_{\Delta S_2} \overline{D}_2 d\overline{S}_2 = \oint_{\Delta S} \sigma dS.$$

Поскольку $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$, а $|d\overline{S}_1| = |d\overline{S}_2| = |d\overline{S}|$, то с учётом равенства подынтегральных скалярных произведений при переходе к записи в проекциях на оси координат получим $D_1 \cos \alpha_1 + D_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = \sigma$. Для окончательной записи граничных условий разложим например, вектор \overline{D}_1 на нормальную и тангенциальную составляющие (рис. 1.6).

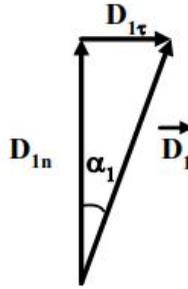


Рисунок 1.6 – Пример разложения вектора \overline{D} на составляющие

Из рис. 1.6 видно, что

$$\cos \alpha_1 = \frac{D_{in}}{D_1}.$$

Аналогичное разложение можно провести и для вектора \overline{D}_2 . Тогда

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_{in}, D_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = -D_{2n}.$$

Учитывая, что среды 1 и 2 изотропны, а заряд σ распределен по поверхности раздела равномерно, получаем окончательное *выражение для нормальных составляющих вектора электрической индукции на границе раздела сред*:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma. \quad (1.24)$$

Физический смысл: нормальная составляющая вектора электрической индукции D_n при переходе через границу раздела двух сред претерпевает скачок, численно равный поверхностной плотности электрического заряда σ .

Граничное условие для нормальной составляющей магнитного поля можно получить из четвертого уравнения Максвелла (1.12):

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

В этом случае, вывод граничных условий аналогичен выводу, приведенному выше, для электрического поля (студенты вывод выполняют самостоятельно).

В результате получаем

$$B_{1n} - B_{2n} = 0$$

или

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (1.25)$$

Физический смысл: нормальная составляющая вектора магнитной индукции B_n при переходе через границу раздела двух сред не изменяется.

Граничные условия для тангенциальных составляющих поля выводятся из первого и второго уравнений Максвелла (1.9), (1.10).

Пусть достаточно гладкая поверхность S разделяет две среды 1 и 2 с различными магнитными (диэлектрическими) проницаемостями μ_1 и μ_2 (ε_1 и ε_2); параметры сред постоянны (рис. 1.7). Обозначим вектором \vec{H}_1 напряжённость магнитного поля в среде 1, \vec{H}_2 – в среде 2. Охватим границу небольшим контуром длиной и высотой Δl , состоящим из элементарных отрезков $\Delta l_1, \Delta l_2$ и $2\Delta l_3$, определяемых по направлению единичными векторами \vec{dl}_1, \vec{dl}_2 и \vec{dl}_3 . Предположим, что $|\Delta l_3| = \Delta h \rightarrow 0$, а по поверхности S в бесконечно тонком слое, помещённом на границе раздела, протекает *поверхностный ток* с плотно-

стью $i_{нов} = dl / dl$. Обозначим угол падения вектора \vec{H}_1 на границу через α_1 , а угол преломления вектора \vec{H}_2 – через α_2 .

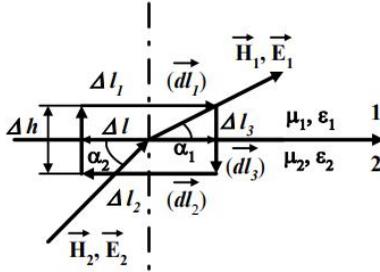


Рисунок 1.7 – Преломление векторов \vec{H} и \vec{E} на границе раздела сред

Запишем первое уравнение Максвелла (1.9) в интегральной форме:

$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \oint_{\Delta S} \vec{\delta} \vec{d}S + \frac{d}{dt} \oint_{\Delta S} \vec{D} \vec{d}S.$$

Очевидно, что из условий $\Delta l \rightarrow 0$ и $S_{бок} \rightarrow 0$ следует замена $\oint_S \vec{\delta} \vec{d}S$ на $\oint_{\Delta l} \vec{i}_{нов} \vec{dl}$, так как $\vec{\delta}$ по величине конечна и следует учитывать лишь поверхностный ток $i_{нов}$. Вкладом боковых сторон ($\Delta l \rightarrow 0$) в контурный интеграл здесь пренебрегаем. Второй интеграл в правой части уравнения Максвелла также стремится к нулю, поскольку $\Delta S = \Delta l \times \Delta h \rightarrow 0$. Тогда исходное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \int_{\Delta l_1} \vec{H}_1 \vec{dl}_1 + \int_{\Delta l_2} \vec{H}_2 \vec{dl}_2 = \oint_{\Delta l} \vec{i}_{нов} \vec{dl}.$$

С учётом того, что при $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$ и $\vec{dl}_1 = \vec{dl}_2 = \vec{dl}$ подынтегральные выражения равны, при записи скалярных произведений векторов в проекциях на оси координат имеем:

$$H_1 \cos \alpha_1 - H_2 \cos \alpha_2 = i_{нов}.$$

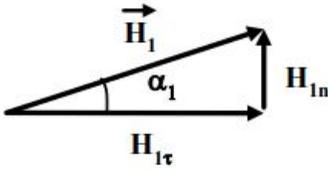


Рисунок 1.8 – Пример разложения вектора \vec{H}

Разложим вектор \vec{H}_1 на нормальную и тангенциальную составляющие (рис. 1.8). Тогда $\cos \alpha_1 = H_{1r} / H_1$, аналогично $\cos \alpha_2 = H_{2r} / H_2$. В итоге имеем: $H_1 \cos \alpha_1 = H_{1r}$, $H_1 \cos \alpha_1 = H_{1r}$, $H_2 \times \cos \alpha_2 = H_{2r}$.

Окончательно получаем *граничное условие для тангенциальной составляющей магнитного поля*:

$$H_{1r} - H_{2r} = i_{нов}. \quad (1.26)$$

Физический смысл: тангенциальная составляющая вектора напряжённости магнитного поля H_r при переходе через границу раздела двух сред претерпевает скачок, численно равный поверхностному току $i_{нов}$.

Граничное условие для тангенциальной составляющей электрического поля можно получить из второго уравнения Максвелла (1.10).

Вывод граничных условий для электрического поля аналогичный вышеизложенному выводу для магнитного поля (студенты вывод делают самостоятельно).

В результате получаем

$$E_{1r} - E_{2r} = 0$$

или

$$E_{1r} = E_{2r}. \quad (1.27)$$

Физический смысл: тангенциальная составляющая вектора напряжённости электрического поля E_r при переходе через границу раздела двух сред не изменяется.

Таким образом, общая система граничных условий для электромагнитных полей имеет следующий вид:

| | | |
|---|---|---------------|
| <p>Электрические компоненты поля</p> $D_{1n} - D_{2n} = \sigma$ $E_{1r} = E_{2r}$ | <p>Магнитные компоненты поля</p> $B_{1n} = B_{2n}$ $H_{1r} - H_{2r} = i_{нов}.$ | <p>(1.28)</p> |
|---|---|---------------|

Индекс 1 соответствует верхней полуплоскости среды, индекс 2 – нижней полуплоскости.

1.6 Примеры использования основных уравнений и законов при описании электромагнитных полей

Для более глубокого понимания физической сущности приведенных выше уравнений и законов представим простейшие примеры их использования при описании электромагнитных процессов.

Пример 1.1 (первое уравнение Максвелла)

Рассмотрим прямой проводник, по которому протекает постоянный ток I (рис. 1.9). Вокруг проводника возникает магнитное поле H , которое может быть рассчитано из первого уравнения Максвелла в интегральной форме (1.9):

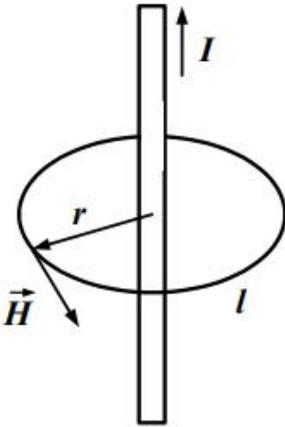


Рисунок 1.9 – Магнитное поле проводника с током

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \vec{\delta} dS, \left(\frac{d\vec{D}}{dt} = 0 \right).$$

Выберем поверхность S , ограниченную контуром l в виде круга радиусом r с центром, совпадающим с осью проводника, и расположенную в плоскости, перпендикулярной к оси проводника. Используя осевую симметрию задачи, заменим скалярное произведение векторов $\vec{H} d\vec{l}$ произведением их длин и вынесем H за знак интеграла как величину постоянную вдоль контура интегрирования. Тогда

$$\oint_l dl = 2\pi r$$

а интеграл в правой части равен полному току I , который пересекает поверхность S . Следовательно,

$$H = \frac{I}{2\pi}. \quad (1.29)$$

Данное соотношение является выражением закона Ампера для нахождения магнитного поля проводника, через который протекает постоянный ток.

Проанализируем роль второго слагаемого $\frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \vec{d}S$ в правой части первого уравнения Максвелла (1.9).

Рассмотрим две пластины конденсатора (рис. 1.10), в цепи которого протекает ток i . Выберем контур интегрирования l в виде окружности, охватывающей проводник. Если поверхность S_1 , ограниченная этим контуром, пересекает проводник до первой пластины конденсатора, то согласно уравнению Максвелла (1.9), ток проводимости создаёт магнитное поле, определяемое следующим соотношением:

$$\oint_l \vec{H} \vec{d}l = \oint_{S_1} \vec{j} \vec{d}S = i_{np}.$$

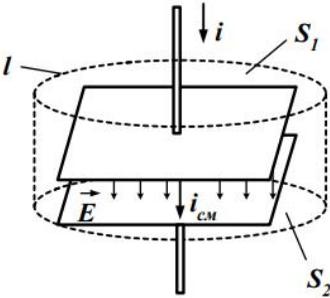


Рисунок 1.10 – Схема прохождения тока в цепи конденсатора

Выберем другую поверхность S_2 , ограниченную этим же контуром, но проходящую между пластинами конденсатора, где ток проводимости прерывается. Тогда

$$\oint_l \vec{H} \vec{d}l = \frac{d}{dt} \oint_{S_2} \vec{D} \vec{d}S.$$

Однако результат возникновения магнитного поля не должен зависеть от выбора поверхности интегрирования, поэтому правые части последних выражений должны быть равны. Следовательно, ток проводимости в цепи конденсатора замыкается током смещения между его пластинами:

$$i_{cm} = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \vec{d}S.$$

Плотность тока смещения

$$\vec{\delta}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Ток смещения возникает в любом диэлектрике при изменении электрического поля во времени. Хотя природа тока проводимости и тока смещения различна, оба они порождают магнитное поле.

Пример 1.2 (второе уравнение Максвелла)

В пространстве, где имеется магнитное поле \vec{B} , рассмотрим одиночный проволочный контур l (рис. 1.11). Согласно второму уравнению Максвелла в интегральной форме (1.10) $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} d\vec{S}$ в пространстве возникает электрическое поле.

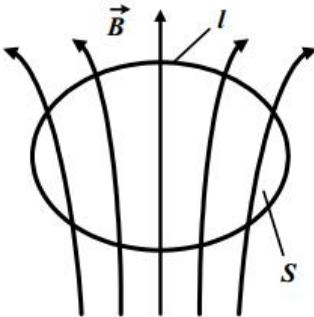


Рисунок 1.11 – Одиночный проволочный контур в магнитном поле

Интеграл в правой части представляет собой поток $\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S}$ вектора магнитной индукции \vec{B} через поверхность S , ограниченную контуром l . Интеграл в левой части представляет собой возникающую в контуре электродвижущую силу $e = \oint_l \vec{E} d\vec{l}$.

$$\text{Уравнение } e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

выражает закон электромагнитной индукции, установленный Фарадеем.

Пример 1.3 (третье уравнение Максвелла)

Рассмотрим точечный заряд q , вокруг которого существует электрическое поле. В соответствии с третьим уравнением Максвелла в интегральной форме (1.11)

$$\varepsilon\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \rho_{своб} dV = q.$$

Если в качестве поверхности интегрирования выбрать сферу (рис. 1.12) с центром в месте расположения заряда,

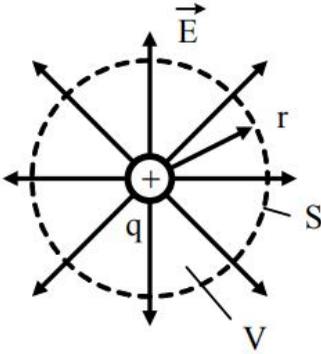


Рисунок 1.12 –
Электрическое поле
точечного заряда

очевидно, что ввиду центральной симметрии \vec{E} и \vec{dS} коллинеарны, а напряжённость постоянна на всей интегрируемой поверхности. Тогда интеграл в левой части равен произведению E на площадь поверхности сферы $4\pi r^2$, а интеграл в правой части равен заряду q .

Напряжённость поля точечного заряда определяется выражением

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Если в электрическое поле заряда q внести пробный заряд q^* , то действующая на него сила будет равна

$$F = q^* E = \frac{q q^*}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Данное выражение представляет собой запись закона Кулона взаимодействия между зарядами (см. п.2.2).

Пример 1.4 (четвёртое уравнение Максвелла)

Четвёртое уравнение Максвелла (1.12) показывает, что поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю, т.е. входящий поток равен выходящему (рис. 1.13). Это означает, что

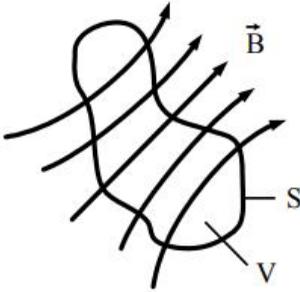


Рисунок 1.13 – Поток вектора магнитной индукции

магнитные силовые линии всегда замкнуты и не имеют ни начала, ни конца. Силовые линии электрического поля начинаются или заканчиваются на зарядах.

Пример 1.5 (уравнение непрерывности)

Если в однородной среде, характеризующейся удельной электропроводностью γ , каким-либо образом создать объёмный заряд ρ , то очевидно, что за счёт токов проводимости этот заряд будет

"расплываться" до тех пор, пока не распределится равномерно по всему объёму, т.е. до исчезновения создаваемого им электрического поля. Это явление называется релаксацией, т.е. возвратом к состоянию равновесия. Проведём количественный анализ процесса релаксации объёмного заряда ρ с помощью уравнения непрерывности (1.15), для чего вместо плотности тока $\vec{\delta}$ подставим его значение из (1.6), а вместо $\text{div } \vec{E}$ – величину $\rho / \epsilon\epsilon_0$ из (1.11) (постоянные величины γ и $\epsilon\epsilon_0$ можно вынести за знак оператора дивергенции). В итоге получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma \rho}{\epsilon\epsilon_0} = 0,$$

решением которого является экспоненциальная функция (рис. 1.14)

$$\rho(t) = \rho(0)e^{-t/\tau_m}.$$

Величина $\tau_m = \frac{\epsilon\epsilon_0}{\gamma}$ характеризует скорость убывания объёмного

заряда и называется максвелловым временем релаксации. Надо иметь в виду, что за время τ_m объёмный заряд уменьшается в $e = 2,7$ раза. Приближённо считается, что объёмный заряд полностью исчезает за время, равное (3-5) τ_m . В металлах, обладающих высокой проводимостью,

мостью, это время очень мало (порядка $10^{-17} - 10^{-18}$ с). В диэлектриках в зависимости от их качества оно равно $10^{-2} - 10^{-6}$ с.

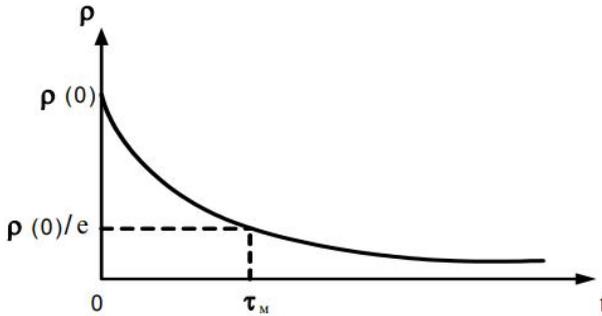


Рисунок 1.14 – Характеристика изменения объемного заряда ρ от времени t

Описанное явление наблюдается, например, в такой простой ситуации, как разряд конденсатора за счёт токов утечки, протекающих через изолирующий диэлектрик. Время разряда определяется параметрами диэлектрика: диэлектрической проницаемостью ε и удельной электропроводностью среды γ .

Вторым простейшим примером использования уравнения непрерывности является также анализ узла электрической цепи (рис. 1.15), в котором сходятся несколько проводников с постоянными токами $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$. Окружим данный узел некоторой замкнутой поверхностью S и воспользуемся уравнением непрерывности в форме (1.16)

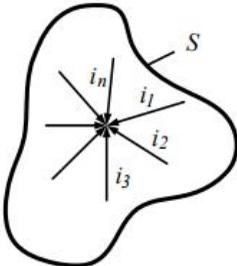


Рисунок 1.15 – Узел электрической цепи

Так как при постоянных токах заряд внутри поверхности не накапливается и не исчезает, то первое слагаемое равно нулю. Второе слагаемое равно полному току, протекающему через поверхность S , поэтому

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

Это соотношение представляет собой первый закон Кирхгофа который является одним из основополагающих в теории электронных цепей (см. п.2.3).

Пример 1.6 (уравнение энергетического баланса)

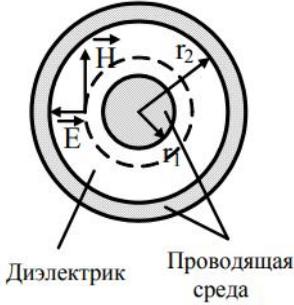


Рисунок 1.16 – Поперечное сечение коаксиального кабеля

Рассмотрим простейший пример применения теоремы Умова-Пойнтинга. Пусть по коаксиальному кабелю (рис. 1.16) протекает постоянный ток I . Напряжение между жилой и оболочкой U . Проводимость материала жилы и оболочки γ . Мощность сигнала, передаваемого по кабелю, $P = IU$. Подсчитаем поток

вектора Пойнтинга через поперечное сечение диэлектрика, заполняющего пространство между жилой и оболочкой.

Напряжённость магнитного поля в диэлектрике можно определить из закона Ампера (1.29):

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Нормальная составляющая вектора напряжённости электрического поля E_n в диэлектрике через напряжение U для коаксиального контура определяется следующим соотношением [3]:

$$E_n = \frac{U}{r \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)},$$

где R_1 - радиус жилы; R_2 - внутренний радиус оболочки.

Тогда тангенциальная составляющая вектора Пойнтинга для точек диэлектрика на расстоянии r от оси ($R_1 \leq r \leq R_2$) определяется выражением

$$\Pi_\tau = E_n H = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Поток вектора Пойнтинга через кольцо диэлектрика с радиусами R_1 и R_2 :

$$\oint_S \vec{\Pi} \vec{dS} = \int_{R_1}^{R_2} \Pi_\tau 2\pi r dr = 2\pi \frac{UI}{2\pi \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \int_{R_1}^{R_2} (r^{-1}) dr = UI.$$

Так как вся подводимая к коаксиальному кабелю мощность $P = IU$ проходит только через диэлектрик, то можно сделать вывод: *электромагнитная энергия от места её генерирования к месту потребления передаётся по диэлектрику; провода являются каналами, по которым проходит ток, и организаторами структуры поля в диэлектрике. По жиле и оболочке энергия к приёмнику не передаётся. Провода сами потребляют из диэлектрика энергию на покрытие тепловых потерь.*

Продемонстрируем данный факт. Для этого подсчитаем поток вектора Пойнтинга внутри жилы на длине l . Тангенциальная составляющая напряжённости электрического поля поверхности жилы по закону Ома

$$E_\tau = \frac{I}{\pi r_1^2 \gamma}.$$

Тогда поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность жилы

$$\oint_S \vec{\Pi} \vec{dS} = \oint_S \Pi_n dS = \oint_S E_\tau H dS = \int_0^l \frac{I^2}{\pi r_1^2 \gamma} dl = I^2 R.$$

Таким образом, эта энергия равна потерям $I^2 R$ в жиле кабеля на длине l .

Пример 1.7 (граничные условия)

Рассмотрим особенности поведения электрического поля у поверхности идеального проводника. Будем исходить из того, что если его электрическая проводимость равна бесконечности, то внутри проводника электрическое поле должно отсутствовать. Но тогда из первых двух граничных условий (1.28) следует, что касательная составляющая поля над поверхностью равна нулю, а вектор напряжённости электрического поля будет перпендикулярен поверхности и равен по-

верхностной плотности заряда $E = E_n = \rho_{\text{пов}} / \epsilon \epsilon_0$. Этот вывод упрощённо распространяется и на реальные металлы.

Магнитная составляющая равна нулю даже в немагнитных металлах. Это означает, что нормальная составляющая вектора напряжённости магнитного поля также равна нулю, поэтому магнитное поле у поверхности будет касательным и перпендикулярным к линиям тока, а его напряжённость равна поверхностной плотности тока (рис. 1.17):

$$H = H_\tau = i_{\text{пов}}.$$

Рассмотрим поведение волн на границе раздела диэлектрик – диэлектрик. В качестве примера преломления вектора на границе двух диэлектриков рассчитаем направление и величину электрического поля в слюде ($\epsilon = 7, \gamma < 10^{-11}$ См/м), если у её границы в воздухе напряжённость электрического поля равна 10^3 В/м, а силовые линии направлены под углом $\alpha_1 = 45^\circ$ к поверхности (рис. 1.18).

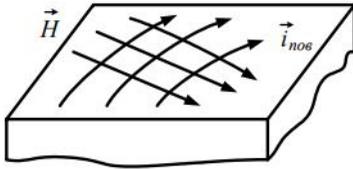


Рисунок 1.17 –
Распределение магнитного
потока и токов на
поверхности металла

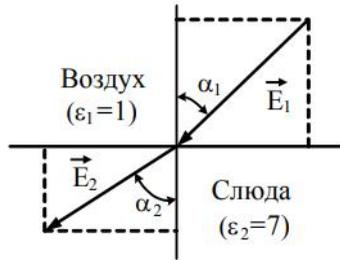


Рисунок 1.18 -
Преломление вектора \vec{E}
на границе раздела
слюда-воздух

Значение удельной электрической проводимости показывает, что слюда – хороший диэлектрик, поэтому внешнее поле не вызывает появления на её поверхности наведенного заряда ($\rho_{\text{пов}} = 0$). Используя обозначения на рис. 1.18, запишем граничные условия для нормальной ($\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$) и тангенциальной ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$) составляющих электрического поля по обе стороны от границы.

Так как $E_{1n} = E_1 \cos \alpha_1 \approx 707 \text{ В/м}$, то $E_{2n} = E_{1n} / \varepsilon_2 \approx 101 \text{ В/м}$, а $E_{2r} = E_{1r} = E_1 \sin \alpha_1 \approx 707 \text{ В/м}$.

Отсюда

$$E_2 = \sqrt{E_{2n}^2 + E_{2r}^2} \approx 714 \text{ В/м},$$

$$\alpha_2 = \arctg\left(\frac{E_{2r}}{E_{2n}}\right) \approx 82^\circ.$$

Вопросы для самопроверки

1. На какие основные диапазоны можно разделить спектр электромагнитных колебаний? Дайте их краткую характеристику.
2. Какие основные векторы характеризуют электромагнитные поля? Запишите связь между ними через материальные параметры сред.
3. Какой физический смысл имеют векторы поляризованности и намагниченности?
4. Для чего вводятся понятия скалярного электрического и векторного магнитного потенциалов?
5. Какие электродинамические параметры характеризуют материальные среды? Перечислите основные типы сред.
6. Какие линии называются силовыми и эквипотенциальными? Продемонстрируйте их распределение на конкретных примерах элементарных источников электрических и магнитных полей.
7. Из каких законов электромагнетизма следуют уравнения Максвелла в интегральной форме? Запишите их и объясните физический смысл.
8. Каким образом осуществляется переход от интегральной формы записи уравнений Максвелла к дифференциальной?
9. Каким образом осуществляется переход от дифференциальной к комплексной форме записи уравнений Максвелла? Для какого типа электромагнитных процессов эти уравнения справедливы?
10. Какие свойства электромагнитного поля характеризует закон непрерывности?
11. Каким образом из уравнений Максвелла можно получить уравнения Лапласа и Пуассона?
12. Каким уравнением характеризуется закон сохранения энергии электромагнитного поля для замкнутой системы?

13. Почему в уравнении баланса энергии для гармонических колебаний отсутствуют члены, содержащие производные по времени?
14. Какие соотношения связывают векторы электромагнитного поля на границе раздела двух сред?
15. Какие основные теоремы и принципы используются при решении задач теории электромагнетизма?

ГЛАВА 2 ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

2.1 Общие свойства и уравнения квазистатических, квазистационарных и стационарных полей

Уравнения Максвелла описывают переменное электромагнитное поле как единый процесс взаимосвязи изменения электрического $\partial \bar{D} / \partial t$ и магнитного $\partial \bar{B} / \partial t$ полей. В зависимости от скорости изменения $\partial \bar{D} / \partial t$ и $\partial \bar{B} / \partial t$ различают *квазистатическое, квазистационарное и быстропеременное* поле. В предельных случаях, когда $\partial \bar{D} / \partial t$ и $\partial \bar{B} / \partial t$ равны нулю, уравнения Максвелла упрощаются и описывают частные виды стационарных электромагнитных полей: *электростатическое поле, электрическое поле постоянного тока и магнитное поле постоянного тока*. Эти поля имеют свои особенности и закономерности; остановимся кратко на наиболее общих из них.

1. *Квазистатическим полем* называется переменное электромагнитное поле, в котором $\partial \bar{B} / \partial t = 0$. Такое поле считается потенциальным, так как $\text{rot} \bar{E} = 0$ и для него отсутствует взаимное влияние электрического и магнитного полей.

2. *Квазистационарное поле* – это медленно меняющееся во времени вихревое переменное поле, для которого можно принять, что плотность тока смещения $(\bar{\delta}_{см} = \partial \bar{D} / \partial t \approx 0)$ мала по сравнению с плотностью тока проводимости $\bar{\delta}_{пр}$. Эффект запаздывания (эффект излучения) отсутствует. Для металлических проводников пренебрежение токами смещения $\left(\frac{\omega \varepsilon_a}{\gamma} \ll 1 \right)$ допустимо в широком диапазоне частот вплоть до $f = 10^{17}$ Гц. Эффект запаздывания, обусловленный конечной скоростью волны, несуществен, если линейные размеры электромагнитных установок намного меньше длин волн, распространяющихся в исследуемой области. При низких частотах, например при промышленной частоте $f = 50$ Гц, длина волны в воздухе $\lambda = 6000$ км, поэтому эффектом запаздывания можно пренебречь в пределах больших областей поля. Большинство электромагнитных полей, исследуе-

мых в электродинамике и радиотехнике, могут рассматриваться как квазистационарные.

Учитывая определения квазистатического и квазистационарного полей, их дифференциальные уравнения запишутся следующим образом:

Квазистатическое поле

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \gamma \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0;$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho_{\text{своб}};$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0.$$

Квазистационарное поле

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \gamma \bar{E};$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho_{\text{своб}};$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0.$$

$$(2.1) \quad (2.2)$$

3. Стационарные поля. Условием стационарности электромагнитных полей является отсутствие их изменения во времени, то есть векторы \bar{E} , \bar{H} , \bar{D} и \bar{B} являются функциями только координат. Это значит, что изменяющиеся во времени компоненты полей, входящих в уравнения Максвелла (1.9) – (1.12) и уравнения непрерывности, отсутствуют. Дополнив данную систему уравнениями Лапласа и Пуассона (1.17), (1.18), получим следующую общую систему уравнений, описывающую стационарные поля:

$$\begin{aligned} \oint_l \bar{H} d\bar{l} &= \oint_s \bar{\delta} d\bar{S}; & \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{\delta}; & \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_a}; \\ \oint_l \bar{E} d\bar{l} &= 0; & \operatorname{rot} \bar{E} &= 0; & \nabla^2 \bar{A} &= -\mu_a \bar{\delta}; \\ \oint_l \bar{D} d\bar{S} &= \int_V \rho dV = \sum q_{\text{своб}}; & \operatorname{div} \bar{D} &= \rho; & \bar{D} &= \varepsilon_a \bar{E}; \\ \oint_s \bar{B} d\bar{S} &= 0; & \operatorname{div} \bar{B} &= 0; & \bar{B} &= \mu_a \bar{H}; \\ \oint_s \bar{\delta} d\bar{S} &= 0; & \operatorname{div} \bar{\delta} &= 0; & \bar{\delta} &= \gamma \bar{E}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из анализа компонент полей, входящих в систему (2.3), следует, что её условно можно разбить на две группы уравнений, характеризующих

ющие электрические (векторы \vec{E}, \vec{D}) и магнитные (векторы \vec{H}, \vec{B}) поля:

Электрические поля

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0; \operatorname{rot} \vec{E} = 0;$$

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = q; \operatorname{div} \vec{D} = \rho;$$

$$\oint_s \vec{\delta} d\vec{S} = 0; \operatorname{div} \vec{\delta} = 0;$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{\text{своб.}}}{\varepsilon_a}; \quad (2.4)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}; \vec{\delta} = \gamma \vec{E}.$$

Магнитные поля

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_s \vec{\delta} d\vec{S}; \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta};$$

$$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0; \operatorname{div} \vec{B} = 0;$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A};$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}; \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}.$$

Из системы уравнений (2.4) и (2.5) видно, что между ними существует только косвенная связь через вектор плотности тока $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$.

Если $\vec{\delta} = 0$, что справедливо для полей постоянных магнитов и областей существования магнитных полей, не занятых токами, то уравнения (2.4) и (2.5) становятся совершенно независимыми и характеризуют электростатическое и магнитостатическое поля. Такие поля называются **потенциальными**.

Для потенциальных (безвихревых) полей линейный интеграл по любому замкнутому контуру от вектора напряжённости электрического поля $\oint_l \vec{E} d\vec{l}$, а также от вектора напряжённости магнитного поля

$\oint_l \vec{H} d\vec{l}$ в области, не занятой током, равен нулю. Поэтому потенциаль-

ные поля характеризуют скалярными функциями: *электрическим потенциалом φ электрического поля и магнитным потенциалом φ_m — магнитного поля постоянного тока.*

В главе 1 приводилось определение скалярного потенциала. Остановимся более подробно на объяснении его физической сущности при применении для решения широкого класса задач электромагнетизма. Рассмотрим вопрос о работе, совершаемой силами поля при переме-

щении заряда, и о связанных с *работой* понятиях **потенциала** и **разности потенциалов**.

Поместим в электрическое поле некоторый заряд q . На заряд будет действовать сила $q\vec{E}$. Пусть заряд q из точки 1 переместился в точку 2 по пути 1-3-2 (рис. 2.1). Работа, затраченная на перенос заряда из точки 1 в точку 2 по пути 1-3-2, определится как сумма элементарных работ $q\vec{E}d\vec{l}$. Эта сумма может быть записана в виде линейного интеграла $q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$.

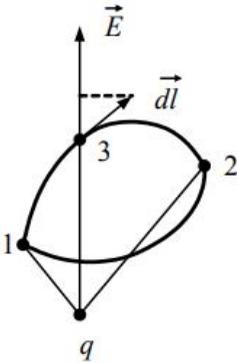


Рисунок 2.1 –
Схема перемещения
заряда q

Заряд q может быть любым. Положим его равным единице (единичный заряд). Под *разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ принято понимать *работу, затрачиваемую силами поля при переносе единичного заряда из начальной точки 1 в конечную точку 2*:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) позволяет определить разность потенциалов точек 1 и 2 как линейный интеграл от напряжённости поля.

Если бы потенциал конечной точки пути 2 был равен нулю ($\varphi_2 = 0$), то потенциал точки 1 определился бы так:

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l},$$

т.е. потенциал произвольной точки поля 1 может быть определён как *работа, совершаемая силами поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки поля в точку поля, потенциал которой равен нулю*.

За точку, имеющую нулевой потенциал, может быть принята любая точка поля. Если такая точка выбрана, то потенциалы всех точек поля определяются однозначно. В курсах физики потенциалом называют

работу, совершаемую силами поля при переносе единичного заряда из данной точки поля в бесконечность: $\varphi_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} d\vec{l}$. В электротехнике считают, что точка с нулевым потенциалом находится на поверхности земли (земля в условиях электростатики есть проводящее тело, поэтому безразлично, где именно – на поверхности земли или в толще её находится эта точка). Таким образом, потенциал любой точки поля зависит от того, какой точке поля придан нулевой потенциал, т.е. потенциал определяется с точностью до постоянной величины. Однако существенного значения это не имеет, так как практически важен не потенциал какой-либо точки поля, а разность потенциалов и производная от потенциала по координатам. При составлении разности потенциалов произвольную постоянную, с точностью до которой определяют потенциал, вычитают, и в разность потенциалов она не входит. На величине производной от потенциала по координатам произвольная постоянная также не скажется, поскольку производная от постоянной величины равна нулю. Картины поля являются графическим изображением совокупности линий вектора поля и линий равного потенциала. Плоскопараллельное поле имеет одинаковую картину поля во всех плоскостях, перпендикулярных одной из осей прямоугольной системы координат (например, поле конденсатора). При плоскомеридианном поле картина поля одинакова во всех плоскостях, проходящих через ось симметрии поля (например, поле цилиндрического конденсатора).

2.2 Электростатическое поле

Электростатическое поле создаётся неподвижными в пространстве и неизменными во времени зарядами.

Исходя из вышеприведённой формулировки вытекают следующие условия существования электростатического поля: скорость заряда $v_q = 0$; ток проводимости отсутствует ($\vec{\delta} = 0$); удельная проводимость среды $\gamma = 0$, т.е. электростатическое поле формируется в среде вакуум – диэлектрик; поле – потенциальное, так как $\text{rot} \vec{E} = 0$.

В заряженном теле (если общий заряд его неизменен во времени) элементарные заряды движутся хаотически. Поэтому даже в непосредственной близости от поверхности этого тела создаваемое элементарными зарядами магнитное поле практически отсутствует. Это и даёт

возможность рассматривать в электрическом поле лишь одну «сторону» электромагнитного поля, а именно электрическую «сторону», описываемую векторами \vec{E}, \vec{D} , потенциалом φ и параметром среды ε_a . Как отмечалось в п.1.1, здесь и в дальнейшем будем рассматривать поля в однородных и изотропных средах.

Основные уравнения, описывающие электростатические поля, следуют из общей системы (2.4) с учётом того, что $\vec{\delta} = 0$ и $\gamma = 0$:

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= 0; & \text{rot } \vec{E} &= 0; \\ \oint_s \vec{D} d\vec{S} &= q; & \text{div } \vec{D} &= \rho; \\ \varphi &= -\int_l \vec{E} d\vec{l} + \text{const}; & \vec{E} &= -\text{grad}\varphi; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}; \nabla^2 \varphi = 0 \text{ при } \rho = 0.$$

Граничные условия электростатики вытекают из общих граничных условий (1.28) для электрических компонент поля:

Граница диэлектрик-диэлектрик

Граница диэлектрик-диэлектрик
(см. п.1.6, пример 1.7)

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma;$$

$$D_n = -\sigma; E_n = -\frac{\sigma}{\varepsilon_a};$$

$$\varepsilon_{a1} E_{1n} - \varepsilon_{a2} E_{2n} = \sigma;$$

$$\varepsilon_{a1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_{a2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma; \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_a}; \quad (2.9)$$

$$D_{1n} = D_{2n} \text{ при } \sigma = 0;$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}; \quad (2.10)$$

$$E_\tau = 0; \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0. \quad (2.11)$$

$$(\varphi_1 = \varphi_2).$$

Граничные условия для потенциалов следуют из сравнения равенств: $\vec{E} = \vec{\tau} E_\tau + \vec{n} E_n$ и $\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\vec{\tau} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) - \vec{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)$, откуда

$E_\tau = -\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}$ и $E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}$. Здесь $\vec{\tau}$ и \vec{n} - единичные векторы тангенциальных и нормальных составляющих.

Основные свойства, теоремы и законы электростатики.

1. Электростатическое поле – безвихревое, потенциальное ($\text{rot}\vec{E} = 0$).

2. При наличии электрического поля в проводящем теле происходит разделение зарядов. В результате этого внутри проводника создаётся внутреннее электрическое поле, компенсирующее внешнее поле. Тогда *внутри идеального проводника напряжённость электрического поля и вектор электрического смещения равны нулю: $E = 0, D = 0$.*

3. **Теорема Гаусса:** *поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся внутри замкнутой поверхности ($\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{\text{своб}}$).*

4. **Закон преломления вектора \vec{E} :** $\frac{\text{tg}\alpha_1}{\text{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$. Из граничных

условий электростатики (граница диэлектрик - диэлектрик) следует, что непрерывна тангенциальная составляющая вектора \vec{E} т.е. $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ (но $E_{1n} \neq E_{2n}$) и $D_{1n} = D_{2n}$ при $\sigma = 0$ (но $D_{1\tau} \neq D_{2\tau}$). Отсюда видно, что полные значения вектора \vec{E} и вектора \vec{D} в общем случае меняются скачком на границе раздела. Связь между углом падения α_2 и углом преломления α_1 (рис. 1.5) находится из анализа треугольников разложения векторов на составляющие (рис. 1.6 п.1.5):

$$\text{tg}\alpha_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} = \frac{\varepsilon_{a1}E_{1\tau}}{D_{1n}}; \text{tg}\alpha_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_{a2}E_{2\tau}}{D_{2n}} \text{ или } \frac{\text{tg}\alpha_1}{\text{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

5. **Закон Кулона** положен в основу определения электростатического поля и описывает его механическое проявление при воздействии на заряды в следующей формулировке: *два точечных заряда q_1 и q_2 в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой \vec{F} , прямо пропорциональной произведению зарядов q_1, q_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними.*

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0, \quad (2.10)$$

где \vec{r}_0 - единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды. Эта сила направлена по линии, соединяющей точечные заряды (рис. 2.2). Если заряды имеют одинаковые знаки, то они стремятся оттолкнуться друг от друга; заряды противоположных знаков стремятся сблизиться.

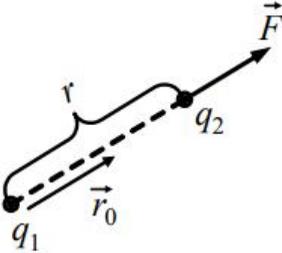


Рисунок 2.2 –
Взаимодействие
зарядов q_1 и q_2

О значении закона Кулона в физике. Шарль Кулон родился в 1736 году, по образованию – военный инженер. Сформулировал в 1785 году закон, называемый его именем, и экспериментально подтвердил его в 1789 году. Закон Кулона сыграл решающую роль в развитии не только теории электромагнетизма, но и в ядерной физике. Так, например, он стал основой при построении общей теории электромагнитного поля Максвеллом.

В 1911 году Резерфорд, используя закон Кулона, построил планетарную модель атома, на основании которой теоретически объяснил физику рассеяния α – частиц на ядре (формула Резерфорда). Экспериментальные проверки точности закона «обратных квадратов» (закона Кулона) к настоящему времени достигли рекордных значений ($\sim 10^{-16}$), что позволило физикам сделать заключение о равенстве нулю массы покоя фотона. Более подробная история открытия закона Кулона и его роль в развитии классической и квантовой электродинамики описаны в [13].

2.3 Электрическое поле постоянного тока

Электрическое поле постоянного тока образуется внутри и вне проводников при прохождении по ним постоянного тока, созданного внешними источниками э.д.с.

Исходя из определения, условия существования электрического поля постоянного тока заключаются в следующем: плотность тока $\vec{d} \neq 0$; ; объёмный заряд $\rho = 0$ ($q = 0$); на поверхности проводника поверхностная плотность заряда постоянна ($\sigma = const$), удельная проводимость среды $\gamma \gg \varepsilon$. Следовательно, электрическое поле постоянного тока характеризуется векторами $\vec{E}, \vec{\delta}$, потенциалом φ и параметром среды γ . Исходя из этого, основные уравнения электрического поля постоянного тока имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= 0; & rot \vec{E} &= 0; \\ \oint_s \vec{\delta} d\vec{S} &= 0; & div \vec{\delta} &= 0; \\ \varphi &= -\int_l \vec{E} d\vec{l} + const; & \vec{E} &= -grad \varphi; \quad (2.12) \\ I &= \oint_s \vec{\delta} d\vec{S}; & \vec{\delta} &= \gamma \vec{E}; \\ & & \nabla^2 \varphi &= 0 \text{ при } \gamma = const. \end{aligned}$$

Граничные условия электрического поля постоянного тока для вектора \vec{E} следуют из системы (1.28), а для вектора $\vec{\delta}$ – из уравнения $\oint_s \vec{\delta} d\vec{S} = 0$ по методике, изложенной в п.1.5:

$$\begin{aligned} \delta_{1n} &= \delta_{2n}; \gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}; \\ E_{1\tau} &= E_{2\tau}; (E_{1n} \neq E_{2n}) \quad E_{1r} = E_{2r}; \text{ при } E_{сноп} = 0; \quad (2.13) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}; \varphi_1 = \varphi_2. \end{aligned}$$

Основные законы электрического поля постоянного тока.

1. **Закон преломления линий вектора $\vec{\delta}$** выводится аналогично закону для вектора \vec{E} (см. п.2.2) и имеет вид

$$\frac{tg \beta_1}{tg \beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

где β_1 и β_2 - углы падения и преломления в проводящей среде соответственно.

2. **Закон Ома в дифференциальной форме:** $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$ – плотность тока проводимости $\vec{\delta}$ пропорциональна напряжённости электрического поля \vec{E} . В интегральной форме закон Ома имеет вид $U = IR$.

3. **Обобщённый закон Ома в дифференциальной форме** для областей, занятых источниками э.д.с.:

$$\vec{\delta} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}),$$

где $\vec{E}_{\text{стор}}$ – поле в источнике э.д.с.

4. **Первый закон Кирхгофа:**

– в интегральной форме: $\oint_S \vec{\delta} d\vec{S} = 0$ – поток вектора плотности тока проводимости через замкнутую поверхность равен нулю;

– в дифференциальной форме: $\text{div} \vec{\delta} = 0$ – дивергенция вектора плотности тока проводимости равна нулю (линии $\vec{\delta}$ замкнуты).

5. **Второй закон Кирхгофа:**

– в интегральной форме: $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$ – циркуляция вектора \vec{E} вне источников э.д.с. равна нулю;

– в дифференциальной форме: $\text{rot} \vec{E} = 0$ – поле потенциально вне источников э.д.с.

6. **Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:** $p = \gamma E^2$ – мощность тепловых потерь P , рассеиваемая за единицу времени в единице объёма проводящей среды при протекании тока проводимости (рис. 2.3), пропорциональна удельной проводимости γ среды и квадрату напряжённости приложенного электрического поля E .

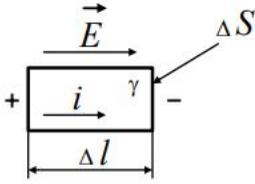


Рисунок 2.3 –
Элемент проводника
с током

Данный закон является следствием его интегральной формы $P = I^2 R$ при рассмотрении элементарного отрезка проводника с током длиной Δl и сечением ΔS . Ниже представлена схема вывода закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:

$$P = \frac{P}{V} = \frac{I^2 R}{V} = \left| \begin{array}{l} I = \delta \Delta S, \\ V = \Delta l \Delta S, \\ R = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S} \end{array} \right| = \frac{\delta^2 \Delta S^2}{\Delta l \Delta S} \times \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S} = \frac{\delta^2}{\gamma} = \frac{\gamma^2 E^2}{\gamma} = \gamma E^2. \quad (2.14)$$

2.4 Магнитное поле постоянного тока

Магнитное поле постоянного тока создаётся в проводнике и окружающем его пространстве при прохождении постоянного тока по проводнику.

Основным условием существования стационарного магнитного поля является наличие неизменного во времени тока проводимости ($\bar{\delta} \neq 0$). Магнитное поле – вихревое ($\text{rot} \bar{H} = \bar{\delta}$) и характеризуется векторами \bar{B} , \bar{H} , \bar{A} , $\bar{\delta}$, а в областях, не занятых токами, скалярным магнитным потенциалом φ_m .

Основные свойства магнитного поля постоянного тока на основании системы уравнений (2.5) могут быть сформулированы следующим образом:

1) **закон полного тока:**

– интегральная форма $\oint_l \bar{H} \bar{dl} = \sum I$ – циркуляция вектора напряжённости магнитного поля \bar{H} равна алгебраической сумме токов, протекающих внутри контура интегрирования;

– дифференциальная форма $rot\vec{H} = \vec{\delta}$ – ротор вектора \vec{H} равен вектору плотности тока $\vec{\delta}$ (поле вихревое);

2) **принцип непрерывности линий магнитной индукции:**

– интегральная форма $\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ или с использованием теоре-

мы Стокса (1.8) и соотношения $\vec{B} = rot\vec{A}$ имеем выражение для магнитного потока Φ через векторный потенциал \vec{A} : $\Phi = \oint_S rot\vec{A} d\vec{S} = \oint_l \vec{A} d\vec{l}$;

– дифференциальная форма $div\vec{B} = 0$ – дивергенция вектора магнитной индукции равна нулю (магнитное поле не имеет истоков). Аналогично $div\vec{A} = 0$;

3) **закон Био-Савара-Лапласа** определяет, какую индукцию магнитного поля $d\vec{B}$ создаёт элемент проводника $d\vec{l}$ с током I на расстоянии r от проводника при отсутствии ферромагнитных сред:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}^0]}{r^2}, \quad (2.15)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведённый из элемента $d\vec{l}$ в точку, в которой определяется магнитная индукция $d\vec{B}$ (рис. 2.4); \vec{r}^0 – единичный орт.

Результирующая индукция магнитного поля в заданной точке будет иметь вид

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}^0]}{r^2}. \quad (2.16)$$

Выражения (2.15) и (2.16) можно записать через плотность тока $\vec{\delta}$ путём введения I в векторное произведение и замены $I d\vec{l}$ на $\vec{\delta} dV$, где dV – элемент объёма проводника с плотностью тока $\vec{\delta}$:

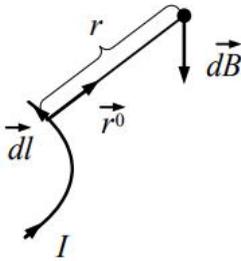


Рисунок 2.4 –
Иллюстрация закона
Био-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{\delta} \times r^0]}{r^2} dV; \quad (2.17)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{\delta} \times r^0]}{r^2} dV.$$

Формулы (2.17) в литературе иногда называют *законом Ампера* по аналогии с (1.29) для замкнутого контура. Законы полного тока и Био-Савара-Лапласа позволяют определить магнитную индукцию, создаваемую током. Однако закон

полного тока применим только к замкнутым контурам, тогда как закон Био-Савара-Лапласа справедлив и для отрезков проводников с токами;

4) **законы изменения векторов магнитного поля на границе раздела двух сред** следуют из общей системы (1.28) и рассмотрения следующих уравнений для векторного потенциала $\vec{A}: \oint_l \vec{A} d\vec{l} = 0$ и $\operatorname{div} \vec{A} = 0 (\vec{A} = \text{const})$.

Используя методику п.1.5 и (1.28), получаем соотношения для векторов магнитного поля на границе раздела двух сред:

$$\begin{aligned} H_{1\tau} - H_{2\tau} &= i_{\text{нов}}; & A_{1\tau} &= A_{2\tau}; \\ B_{1n} &= B_{2n}; & A_{1n} &= A_{2n}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из (2.18) следует, что вектор не претерпевает скачков на границе раздела двух сред.

При использовании скалярных магнитных потенциалов (поле потенциальное)

$$\varphi_{1M} = \varphi_{2M}; \quad \mu_1 \frac{\partial \varphi_{1M}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{2M}}{\partial n}.$$

Закон преломления линий вектора магнитной индукции имеет вид, аналогичный электрическим стационарным полям:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

2.5 Аналогия между стационарными полями

Аналогия между электрическим полем постоянного тока и электростатическим полем. По своей природе электростатическое поле и поле постоянного тока в проводящей среде различны. Электростатическое поле создается неизменными во времени и неподвижными в пространстве электрическими зарядами, тогда как в электрическом поле в проводящей среде электрические заряды движутся упорядочено под действием внешнего источника. Тем не менее между двумя полями может быть проведена определенная формальная аналогия. Общим свойством электрического поля постоянного тока и электростатического поля является их потенциальность: $\text{rot}\vec{E} = 0$. Для обоих полей справедливо уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$, если рассматриваемая область электрического поля находится вне источников энергии, а область электростатического поля – вне объемного заряда. Из подобия уравнений, описывающих эти поля, следуют формальная аналогия между соответствующими величинами в этих уравнениях и тождественность граничных условий для них при одинаковой форме граничных поверхностей (табл. 2.1). При этом картины обоих полей подобны, что позволяет электростатическое поле в диэлектрике моделировать электрическим полем постоянного тока в проводящей среде и наоборот.

Таблица 2.1 – Аналогия электрических стационарных полей

| Электростатическое поле | Электрическое поле постоянного тока |
|--|-------------------------------------|
| $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$ | $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$ |
| $\text{rot}\vec{E} = 0$ | $\text{rot}\vec{E} = 0$ |
| $\oint_s \vec{D} d\vec{S} = 0$ (при $\rho = 0$) | $\oint_s \vec{\delta} d\vec{S} = 0$ |
| $\text{rot}\vec{E} = 0$ | $\text{rot}\vec{E} = 0$ |
| $\oint_s \vec{D} d\vec{S} = 0$ (при $\rho = 0$) | $\int_s \vec{\delta} d\vec{S} = 0$ |
| $\text{div}\vec{D} = 0$ (при $\rho = 0$) | $\text{div}\vec{\delta} = 0$ |
| $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$ | $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$ |

| | |
|---|---|
| $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ | $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ |
| $\varphi = -\int_l \vec{E} \vec{dl} + \text{const}$ | $\varphi = -\int_l \vec{E} \vec{dl} + \text{const}$ |
| $\nabla^2 \varphi = 0$ | $\nabla^2 \varphi = 0$ |
| $E_{1r} = E_{2r}$ | $E_{1r} = E_{2r}$ |
| $D_{1n} = D_{2n}$ (при $\sigma = 0$) | $\delta_{1n} = \delta_{2n}$ |
| $\frac{\text{tg}\alpha_1}{\text{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ | $\frac{\text{tg}\beta_1}{\text{tg}\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ |
| $\varphi_1 = \varphi_2$ | $\varphi_1 = \varphi_2$ |
| Q | I |
| \vec{D} | $\vec{\delta}$ |
| ε_a | γ |

Аналогия между магнитным полем постоянного тока и электростатическим полем. Дифференциальные уравнения магнитного поля постоянного тока, записанные для пространства вне тока, и дифференциальные уравнения электростатического поля в отсутствие объёмных зарядов аналогичны. В этом случае применим принцип двойственности (см. п.1.1). Расчёт магнитного поля аналогичен расчёту электростатического поля, при этом в решении заменяют ε_0 на μ_0 , φ на φ_m , \vec{E} на \vec{H} , \vec{D} на \vec{B} (табл. 2.2).

Таблица 2.2 – Аналогия электрического и магнитного стационарных полей

| Электростатическое поле | Электрическое поле постоянного тока |
|--|-------------------------------------|
| $\oint_l \vec{E} \vec{dl} = 0$ | $\oint_l \vec{H} \vec{dl} = 0$ |
| $\text{rot}\vec{E} = 0$ | $\text{rot}\vec{H} = 0$ |
| $\oint_s \vec{D} \vec{dS} = 0$ (при $\rho = 0$) | $\oint_s \vec{B} \vec{dS} = 0$ |

Продолжение табл. 2.2

| | |
|---|---|
| $rot \vec{E} = 0$ | $rot \vec{H} = 0$ |
| $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 0$ (при $\rho = 0$) | $\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ |
| $div \vec{D} = 0$ (при $\rho = 0$) | $div \vec{B} = 0$ |
| $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$ | $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ |
| $\vec{E} = -grad \varphi$ | $\vec{H} = -grad \varphi_M$ |
| $\varphi = -\int_l \vec{E} dl + const$ | $\varphi_M = -\int_l \vec{H} dl + const$ |
| $\nabla^2 \varphi = 0$ | $\nabla^2 \varphi_M = 0$ |
| $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ | $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ |
| $D_{1n} = D_{2n}$ (при $\sigma = 0$) | $B_{1n} = B_{2n}$ |
| $\frac{tg \alpha_1}{tg \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ | $\frac{tg \alpha_1}{tg \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ |
| $\varphi_1 = \varphi_2$ | $\varphi_{1M} = \varphi_{2M}$ |
| φ | φ_M |
| \vec{E} | \vec{H} |
| ε_a | μ_a |

Между картиной электростатического поля и картиной магнитного поля постоянного тока в областях, не занятых током, существует соответствие двух типов. Первый тип соответствия – когда одинаково распределение линейных зарядов в электростатическом поле и линейных токов в магнитном поле. В этом случае картина магнитного поля подобна картине соответствующего электростатического поля. Отличие состоит лишь в том, что силовым линиям электростатического поля отвечают эквипотенциальные линии магнитного поля, а эквипотенциалам электростатического поля соответствуют силовые линии магнитного поля (см. рис. 1.2, глава 1). Второй тип соответствия – когда одинакова форма граничных эквипотенциальных поверхностей в электростатическом поле и в магнитном поле постоянного тока. В этом случае картина поля оказывается совершенно одинаковой. Например, силовые

линии магнитного поля в воздушном промежутке между полюсом и якорем машины постоянного тока совпадают с силовыми линиями электрического поля, создаваемого электродами, имеющими форму полюса и якоря (рис. 2.5).

2.6 Электрическая ёмкость, собственная и взаимная индуктивность, энергия стационарных полей

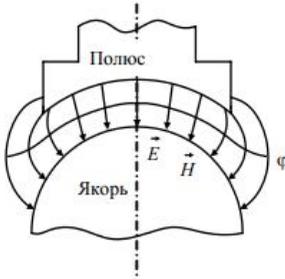


Рисунок 2.5 –
Демонстрация
анalogии силовых и
эквипотенциальных
линий

Понятия электрической ёмкости C , собственной L и взаимной M индуктивностей являются интегральными характеристиками не только электростатического и магнитного полей, но и электрических цепей. Расчёт величин C , L и M проводится методами теории поля. В некоторых случаях через эти величины может быть вычислена также энергия электрического и магнитного полей.

Электрическая ёмкость и энергия. При постоянной диэлектрической проницаемости среды заряд уединённого проводящего тела пропорционален его потенциалу $Q = C\varphi$. Заряд двух проводников, разделённых диэлектриком и заряженных равными по значению и противоположными по знаку зарядами, пропорционален разности потенциалов этих тел $Q = C(\varphi_1 - \varphi_2)$. При этом коэффициент пропорциональности C называется **ёмкостью**.

Ёмкость определяют как отношение заряда уединённого проводящего тела к его потенциалу $C = Q/\varphi$, а ёмкость двух проводящих тел - как отношение абсолютного значения заряда к разности потенциалов этих тел:

$$C = \frac{Q}{(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{Q}{U}.$$

Из определения ёмкости следует единица её размерности

$1 \frac{\text{Кулон}}{\text{Вольт}} = 1 \text{ Фарада (Ф)}$. Это очень крупная единица, и поэтому на

практике пользуются более мелкими, кратными ей единицами: микрофарадой (мкФ) и пикофарадой (пФ): $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$; $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$.

Ёмкость зависит от геометрических размеров, конфигурации, диэлектрической проницаемости среды и взаимного расположения тел. Устройством, предназначенным для получения определённой величины ёмкости, является конденсатор, который представляет собой систему из двух проводников (обкладок, электродов), разделённых диэлектриком. В зависимости от формы обкладок конденсаторы могут быть плоскими, цилиндрическими, сферическими и др. Если диэлектрическая проницаемость постоянна, то ёмкость конденсатора не зависит от напряжения между обкладками, его характеристика – линейна. При зависимости диэлектрической проницаемости от напряжённости поля ёмкость конденсатора зависит от напряжения между обкладками и его характеристика – нелинейна. При наличии нескольких заряженных проводников вводят понятия частичных ёмкостей и эквивалентной ёмкости системы [1-3]. Запас электрической энергии в объёме V определяется следующим соотношением:

$$W_э = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_a E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \bar{D} dV. \quad (2.19)$$

Расчёт энергии проще проводить через скалярные характеристики поля: потенциалы φ и заряды q . Для этого в (2.19) проведём замену

$\bar{E} = -\text{grad} \varphi$ и воспользуемся тождеством векторного анализа

$$\text{div} \bar{D} = \varphi \text{div} \bar{D} + \bar{D} \text{grad} \varphi, \text{ откуда } \bar{D} \text{grad} \varphi \equiv \text{div} \bar{D} - \varphi \text{div} \bar{D}.$$

$$\text{В итоге имеем } W_э = \frac{1}{2} \int_V \varphi \text{div} \bar{D} dV - \frac{1}{2} \int_V \text{div} \varphi \bar{D} dV.$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса ($\text{div} \bar{D} = \rho$) и Остроградского –

Гаусса (1.7), получим $W_э = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV - \frac{1}{2} \oint_S \varphi \bar{D} dS$. Можно показать,

что для локального распределения заряда в неограниченном пространстве V поверхностный интеграл стремится к нулю, тогда

$$W_3 = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (2.20)$$

Если распределение заряда разбить на N отдельных областей V_i ($i=1, 2, \dots, N$), несущих полные заряды q_i , то для системы проводников можно считать $\varphi_i = \text{const}$. Тогда

$$W_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i \int_{V_i} \rho_i dV_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i q_i. \quad (2.21)$$

Из соотношения (2.21) электрическая энергия конденсатора через ёмкость определяется следующим образом:

$$W_3 = \frac{Q(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q}{2C}. \quad (2.22)$$

Соотношение (2.22) позволяет вычислить ёмкость конденсатора (системы из двух проводников) через электрическую энергию.

Индуктивность и взаимная индуктивность, магнитная энергия.

Если по замкнутому контуру течёт электрический ток I , то внутри контура создаётся магнитное поле (рис. 2.6), индукция которого \vec{B} пропорциональна силе тока I и определяется по закону Био-Савара-Лапласа (2.16). Так как магнитный поток Φ

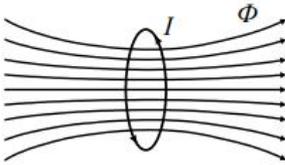


Рисунок 2.6 –
Магнитный поток
контура с током

связан с магнитной индукцией выражением $\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S}$, то маг-

нитный поток, создаваемый контуром с током, будет пропорционален силе тока, протекающего в контуре $\Phi = LI$, где L – коэффициент пропорциональности, который называется *индуктивностью*

контура.

Таким образом, **индуктивностью контура** является коэффициент пропорциональности между собственным магнитным потоком, пронизывающим контур, и током в этом контуре.

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{I} \oint_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (2.23)$$

Теперь рассмотрим два контура с токами I_1 и I_2 . Такие

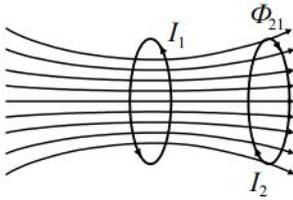


Рисунок 2.7 –
Магнитные потоки
двух контуров с
токами

контуры создают магнитные потоки Φ_1 и Φ_2 соответственно. Часть магнитного потока Φ_{12} , создаваемого током I_2 первого контура, пронизывает второй контур, а часть магнитного потока Φ_{21} , создаваемого током I_1 второго контура, пронизывает первый контур (рис. 2.7).

Между магнитным потоком Φ_{21} , пронизывающим второй контур, и током I_1 первого контура существует линейная связь $\Phi_{21} = L_{21}I_1$, здесь коэффициент пропорциональности L_{21} называется *взаимной индуктивностью контуров*. Аналогично можно записать и для первого контура $\Phi_{12} = L_{12}I_2$. Расчёты, подтверждаемые опытом, показывают, что $L_{21} = L_{12} = M$.

Коэффициент пропорциональности M между током одного контура и магнитным потоком, создаваемым этим током, пронизывающим второй контур, называется взаимной индуктивностью.

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{1}{I_1} \oint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{dS} = \frac{1}{I_2} \oint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}. \quad (2.24)$$

Магнитные потоки, создаваемые постоянным током, определяют статические индуктивности, которые зависят от геометрических размеров контуров, их взаимного расположения, магнитной проницаемости материалов контуров и среды. Для нелинейных сред $[\mu = f(H)]$ индуктивности L и M зависят от токов в контурах. При вычислении собственной индуктивности рассматривают области внутри 1 и вне провода 2, тогда $L = L_1 + L_2$. Если радиус провода мал по сравнению с остальными размерами контура, то можно допустить, что внешнее магнитное поле создаётся током, сосредоточенным на оси провода. Собственная индуктивность одного контура может быть определена исходя из основного соотношения для энергии магнитного поля

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mu_a H^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \overline{B} \overline{H} dV. \quad (2.25)$$

Как и в случае электрических полей, можно перейти к записи магнитной энергии через источники $\overline{\delta}$ и потенциалы \overline{A} . Проведём в (2.25) замену $\overline{B} = \text{rot} \overline{A}$ и воспользуемся тождеством векторного анализа

$$\text{div} [\overline{H} \times \overline{A}] = \overline{A} \text{rot} \overline{H} - \overline{H} \text{rot} \overline{A},$$

откуда $\overline{H} \text{rot} \overline{A} = \overline{A} \text{rot} \overline{H} - \text{div} [\overline{H} \times \overline{A}]$. С учётом закона полного тока $\text{rot} \overline{H} = \overline{\delta}$ равенство (2.25) примет следующий вид:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \overline{A} \overline{\delta} dV - \frac{1}{2} \int_V \text{div} [\overline{H} \times \overline{A}] dV.$$

Применим ко второму интегралу теорему Остроградского – Гаусса (1.7), при этом можно показать, что поток вектора $[\overline{H} \times \overline{A}]$ через замкнутую поверхность, охватывающую все источники объёма V , будет равен нулю. В итоге имеем

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \overline{A} \overline{\delta} dV. \quad (2.26)$$

Предположим, что $\int_S \overline{\delta} \overline{dS} = I = \text{const}$ для любого отрезка \overline{dl} на данном контуре, а $\oint_l \overline{A} \overline{dl} = \Phi = \text{const}$ для любого сечения \overline{dS} , тогда объёмный интеграл (2.26) можно записать в следующем виде:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_S \overline{\delta} \overline{dS} \times \int_l \overline{A} \overline{dl} = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{LI^2}{2}.$$

Для практических расчётов удобно исходить из следующих равенств:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mu_a H^2 dV = \frac{LI^2}{2}.$$

или

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mu_a H dS = \sum_{k=1}^n M_{ik} I_k. \quad (2.27)$$

При этом магнитный поток может быть рассчитан по векторному потенциалу $\Phi_i = \oint_{l_i} \vec{A} d\vec{l}_i$.

2.7 Примеры анализа стационарных и квазистационарных полей в простейших компонентах электронных цепей

Простейшие компоненты устройств электронной техники – резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы, отрезки соединительных линий. Кроме названных, электронные цепи содержат так называемые активные компоненты, которые непосредственно преобразуют и усиливают сигналы, преобразуют энергию из одной формы в другую, отображают информацию и т.п. Эти компоненты являются предметом изучения курсов электроники. Рассмотрим лишь простейшие (пассивные) компоненты с точки зрения их схемотехнических свойств, т.е. связи между током и напряжением (резисторы), зарядом и напряжением (конденсаторы), магнитным потоком и током (катушки индуктивности).

Пример 2.1 (резистор).

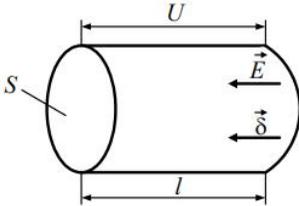


Рисунок 2.8 – Резистор

В простейшем варианте резистор – некоторый объем вещества (рис. 2.8), обладающего заметной электрической проводимостью, для которого выполняется закон Ома в дифференциальной форме: $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$. Умножим обе части этого равенства на элементарный объем $\vec{dS} \vec{dl}$ и проинтегрируем по всему объему.

Интеграл от $\vec{\delta} \vec{dS}$ в левой части – полный ток il , а интеграл от $\vec{E} \vec{dl}$ в правой – разность потенциалов U на всей длине образца. Поэтому $il = \gamma SU$ или $U = iR$, где $R = l / \gamma S$ – сопротивление.

Таким образом, для резистора характерна прямая пропорциональность между протекающим током и падением напряжения. Эта закономерность называется законом Ома, а коэффициент пропорциональности – сопротивлением. Такая зависимость наблюдается лишь для начального участка вольтамперной характеристики резистора. В сильных электрических полях удельная электрическая проводимость ста-

новится зависящей от напряженности электрического поля, и закон Ома нарушается.

Пример 2.2 (плоский конденсатор). Отличительным признаком элементов, характеризующихся ёмкостью, является электростатическое поле. Рассмотрим конденсатор, на пластинах которого расположены равные по величине и противоположные по знаку заряды (рис. 2.9). Известно (см. п.2.5), что заряд одной из пластин прямо пропорционален разности потенциалов $q = CU$, где C – ёмкость конденсатора.

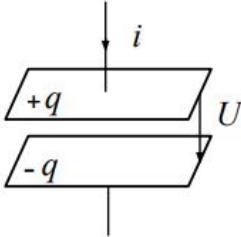


Рисунок 2.9 –
Плоский конденсатор

Увеличение заряда, например, на верхней пластине приведёт к увеличению разности потенциалов. Но с другой стороны, увеличение заряда возможно лишь за счёт протекания тока в цепи, значение которого $i = dq / dt$. Поэтому ток в цепи конденсатора пропорционален скорости

изменения напряжения во времени $i = C \frac{dU}{dt}$, а коэффициентом про-

порциональности является ёмкость конденсатора. При подключении к конденсатору переменного напряжения в его цепи будет протекать переменный ток. В предположении квазистационарности процесса

($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$), причём между их комплексными амплитудами наблюдается

прямая пропорциональность $\dot{i} = j\omega C \dot{U}$.

По форме это равенство аналогично закону Ома, а величина $1/\omega C = X_C$ называется *реактивным ёмкостным сопротивлением*.

Пример 2.3 (катушка индуктивности). Одним из элементов электронных цепей является катушка индуктивности, при протекании через которую электрического тока возникает магнитное поле (рис. 2.10). Для анализа схемо-технических свойств такого элемента предположим, что он изготовлен из проводника

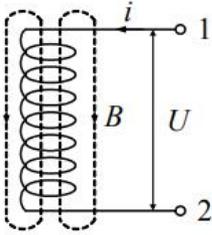


Рисунок 2.10 –
Катушка индуктивности

транству. Так как в идеальном проводе электрическое поле отсутствует, интеграл на первом участке равен нулю, а на втором – разности потенциалов между точками 1 и 2 (2.6), т.е. падению напряжения на катушке (с обратным знаком). Интеграл в правой части равен потоку вектора магнитной индукции Φ через поверхность, ограниченную выбранным контуром. Как известно, этот поток пропорционален току, т.е. $\Phi = Li$. Поэтому напряжение U на катушке, в предположении

квазистационарности процесса ($\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0$), пропорционально скорости изменения тока во времени:

$$U = L \frac{di}{dt},$$

а коэффициент пропорциональности L называется *индуктивностью* (см. п.2.6).

При работе катушки на переменном токе ($i \rightarrow \dot{I} \times e^{j\omega t}$, $U \rightarrow \dot{U} \times e^{j\omega t}$) между амплитудами напряжения и тока будет наблюдаться прямая пропорциональность, так как если воспользоваться методом комплексных амплитуд,

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I}.$$

Формально эта зависимость для комплексных амплитуд аналогична закону Ома, и коэффициент пропорциональности $X_L = \omega L$ называется *реактивным сопротивлением катушки индуктивности* аналогично ёмкостному реактивному сопротивлению конденсатора (см. пример 2.2).

без потерь и воспользуемся вторым уравнением Максвелла в интегральной форме (1.10):

$$\oint_l \bar{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \oint_s \bar{B} d\vec{S}. \quad \text{В качестве}$$

замкнутого контура интегрирования выберем линию, проходящую от точки 1 до точки 2 вдоль проводника с током, и затем от точки 2 до точки 1 по свободному прос-

Пример 2.4 (магнитная индукция отрезка провода с током). Для сравнения законов полного тока и Био-Савара-Лапласа рассмотрим процедуру нахождения магнитной индукции, создаваемой отрезком линейного провода с током i в произвольной точке m (рис. 2.11). Для нахождения магнитной индукции воспользуемся соотношением (2.16).

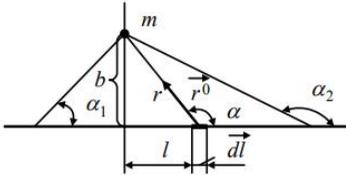


Рисунок 2.11 – К определению магнитной индукции отрезка провода

Предположим, что точка m удалена на расстояние b . Угол между \vec{dl} и \vec{r}^0 обозначим α . Из геометрических соображений имеем: $r = \frac{b}{\sin \alpha}$,

$l = -bctg\alpha$, следовательно,

$$dl = \frac{bd\alpha}{\sin^2 \alpha}; \left[\vec{dl} \times \vec{r}^0 \right] = dl \times l \times \sin \alpha; dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi b} \sin \alpha d\alpha.$$

В результате интеграл (2.16) и его решение запишутся в следующем виде:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где вектор \vec{B} направлен к читателю.

Если провод будет бесконечно длинный, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 180^\circ$,

$\alpha_2 = 180^\circ$, $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 2$ и $B = \frac{\mu_0 i}{4\pi b}$, что совпадает с результатом, полученным по закону полного тока в п.1.6 (1.29).

Пример 2.5 (поле и ёмкость двухпроводной линии).

Одной из простых задач электростатики, при решении которой используется теорема Гаусса в интегральной форме (1.11) является определение напряжённости поля \vec{E} , потенциала φ и ёмкости C двухпроводной линии передачи – одной из компонент электронных цепей. При этом для большей наглядности решение задачи целесообразно разбить на три этапа: определение поля бесконечно длинного и тонкого про-

водника (заряженной оси), двух параллельных заряженных осей и двух- проводной линии с учётом толщины проводников.

Заряженная ось расположена в диэлектрической среде ϵ_a и имеет заряд на единицу длины $\tau = \frac{\partial q}{\partial l}$. Для нахождения напряжённости поля

\vec{E} в некоторой точке, удалённой на расстояние r от оси (рис. 2.12), проведём через эту точку цилиндрическую поверхность так, что её ось совпадает с заряженной осью.

Тогда теорема Гаусса для такой системы запишется следующим образом:

$$\oint_S \vec{E} \vec{dS} = \frac{q}{\epsilon_a} = \frac{1}{\epsilon_a} \int \tau \vec{dl}. \quad (2.28)$$

В нашем случае замкнутая поверхность образована боковой поверхностью цилиндра и двумя его основаниями. Поток вектора \vec{E} имеется только через боковую поверхность цилиндра.

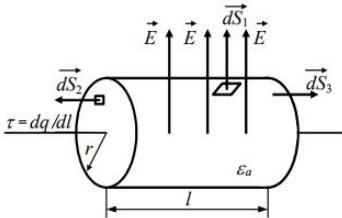


Рисунок 2.12 –

К определению напряжённости электрического поля заряженной оси

Через основания поток вектора \vec{E} отсутствует, так как элемент поверхности \vec{dS} каждого из них перпендикулярен \vec{E} , то имеем интегрирование только по боковой поверхности. С учётом того, что элементы \vec{dS} боковой поверхности и напряжённость электрического поля

\vec{E} в любой точке цилиндра по направлению совпадают, а τ не зависит от элемента длины нити, уравнение (2.28) примет следующий вид:

$$E \oint_S dS_1 = \frac{\tau}{\epsilon_a} \int dl \quad \text{или} \quad ES_1 = \frac{\tau}{\epsilon_a} l,$$

где $S_1 = 2\pi rl$.

Откуда напряжённость поля заряженной оси

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}.$$

(2.29)

Из (2.29) видно, что напряжённость в поле заряженной оси изменяется обратно пропорционально расстоянию r точки от оси, поэтому потенциал определяется следующим образом:

$$\varphi = -\int E dr = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \int (r^{-1}) dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + C, \quad (2.30)$$

где C – константа интегрирования, а единица, находящаяся под знаком логарифма в (2.30), имеет смысл единичного радиуса (единицы измерения), поэтому логарифм берётся от величины с нулевой размерностью.

Параллельные заряженные оси схематично представлены

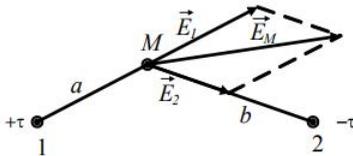


Рисунок 2.13 –
Электрическое поле
двух заряженных осей

на рис. 2.13. Пусть одна ось на единицу длины имеет заряд $+\tau$, другая – заряд $-\tau$. Возьмём в их поле некоторую произвольную точку M . Результирующая напряжённость поля в ней $\vec{E}_M = \vec{E}_{M1} + \vec{E}_{M2}$.

Расстояние от точки M до положительно заряженной оси

обозначим через a , до отрицательно заряженной оси – через b . Потенциал точки M равен сумме потенциалов от каждой оси:

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{a} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{b} + C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b}{a} + C \quad (2.31)$$

Для эквипотенциальных линий ($\varphi = const$) расстояние $\frac{b}{a} = const$.

Двухпроводная линия с проводами конечного радиуса схематически представлена на рис. 2.14. Пусть два провода одинакового радиуса R находятся на расстоянии d друг от друга. Если левому проводу будет сообщён заряд $+\tau$ на единицу длины, а правому $-\tau$, то в пространстве между проводами возникнет электрическое поле. Заряды проводов распределятся по поверхности с неодинаковой плотностью:

на внутренних стенках проводов плотность заряда будет больше, чем на внешних.

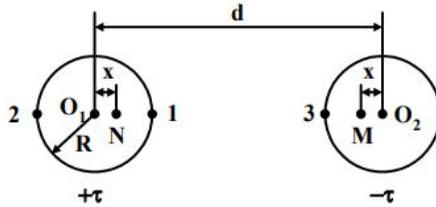


Рисунок 2.14 – Схема двухпроводной линии

Поверхность каждого провода в отдельности является эквипотенциалью. Внутри проводов $E = 0$. Задача о поле двухпроводной линии сводится к рассмотренной выше задаче о поле двух заряженных осей. Расположим две заряженные оси так, чтобы поверхности каждого провода являлись эквипотенциальными.

Точками O_1 и O_2 обозначим геометрические оси проводов. Пусть заряженные оси будут расположены в точках M и N . Из условия симметрии они удалены от геометрических осей на одинаковое расстояние x . Запишем условие равенства потенциалов точек 1 и 2 левого

провода. Отношение $\frac{b}{a}$ в (2.31) для точки 1 есть $\frac{d - R - x}{R - x}$; отношение

$\frac{b}{a}$ для точки 2 равно $\frac{d + R - x}{R + x}$.

Из равенства $\frac{d - R - x}{R - x} = \frac{d + R - x}{R + x}$ получим

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - R^2}. \quad (2.32)$$

В выражении (2.32) знак минус перед радикалом соответствует положению точки N , знак плюс – точке M . Нетрудно убедиться в том, что если $d \gg R$, то x становится на много меньше R . При этом электрические и геометрические оси практически совпадают. На рис. 2.15 приведена картина электрического поля двухпроводной линии.

Найдём **ёмкость двухпроводной линии**. Для этого выразим напряжение между двумя проводами через заряд τ на единицу длины. Вы-

берем точку 1 (см. рис. 2.14), принадлежащую поверхности левого провода, точку 3 – поверхности правого провода. Разность потенциалов между ними

$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d-R-x}{R-x} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R-x}{d-R-x}.$$

$$\text{При } d \gg R \text{ и } R \gg x \quad U_{13} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} 2 \ln \frac{d}{R} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{d}{R}.$$

Следовательно, ёмкость единицы длины линии при условии $d \gg R$

$$C = \frac{\tau}{U_{13}} = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \frac{d}{R}}. \quad (2.33)$$

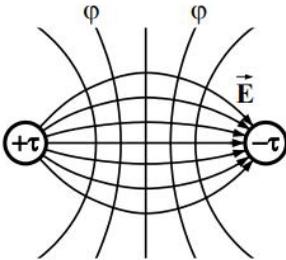


Рисунок 2.15 –
Картина электрического
поля двухпроводной
линии

Из (2.33) следует, что *ёмкость* линии *зависит только от её геометрических размеров и от свойств среды, в которой она располагается*. Зависимость от величины заряда и напряжения U_{13} в выражении (2.33) отсутствует. Следует отметить, что если расстояние между двумя проводниками увеличивать, то ёмкость будет уменьшаться.

Пример 2.6 (ёмкость и индуктивность коаксиального кабеля (цилиндрического конденсатора)).

Коаксиальный кабель (цилиндрический конденсатор) представляет собой два цилиндрических проводника (один – сплошной, другой – полый), расположенных соосно (рис. 2.16). Пространство между проводниками заполнено диэлектриком с проницаемостью ϵ_a .

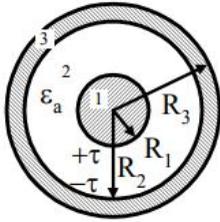


Рисунок 2.16 –
Коаксиальный кабель (конденсатор)

Пусть внутренний и наружный проводники заряжены разноимёнными зарядами с линейной плотностью $+\tau$ и $-\tau$. Эти заряды сосредотачиваются на обращённых друг к другу поверхностях. Так как цилиндрические проводники коаксиального кабеля расположены соосно, то заряды равномерно распределены по всей поверхности. Поэтому поле между этими электродами можно рассматривать

как поле, создаваемое заряженной нитью (см. пример 2.5). Тогда напряжённость электрического поля между проводниками определяется выражением (2.29).

Напряжение между обращёнными друг к другу поверхностями проводов $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Здесь φ_1 – потенциал на поверхности внутреннего проводника, φ_2 – потенциал на внутренней поверхности наружного проводника.

Из (2.30) находим U :

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \int_{R_1}^{R_2} (r^{-1}) dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Подставив полученное значение напряжения в формулу для ёмкости, получаем

$$C = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (2.34)$$

Из соотношения (2.34) видно, что ёмкость коаксиального кабеля, как и двухпроводной линии (2.33), зависит только от параметров материальной среды и геометрии электродов. Собственная индуктивность коаксиального кабеля L на единицу длины при постоянном токе и $\mu = const$ создаётся магнитными потоками, распределёнными в трёх областях поля: внутри жилы кабеля L_1 , в области L_2 , занимаемой изоляцией (внешней по отношению к току жилы), и внутри оболочки

L_3 (см. рис. 2.16). Полная собственная индуктивность кабеля $L = L_1 + L_2 + L_3$.

Пример 2.7 (использование аналогии стационарных электрических полей). Если какие-либо электроды поместить в проводящую среду и присоединить к источнику э.д.с., то в среде возникнет ток I . При напряжении между электродами U_{12} проводимость среды является величиной, обратной сопротивлению $G = I / U_{12}$.

Поскольку $I = \int \vec{\delta} \vec{d}S = \gamma \int \vec{E} \vec{d}S$ и $U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \vec{dl}$, то проводимость

$$G = \frac{\gamma \int \vec{E} \vec{d}S}{\int_1^2 \vec{E} \vec{dl}}. \quad (2.36)$$

Если разделить (2.36) на (2.35), то после сокращения получим

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon_a}{\gamma}, \quad (2.37)$$

т.е. ёмкость C между двумя телами, разделёнными диэлектриком с абсолютной диэлектрической проницаемостью ε_a , так относится к проводимости G между теми же телами, если поместить их в среду с электрической проводимостью γ , как ε_a относится к γ .

Соотношение (2.37) позволяет по известному выражению ёмкости между какими-либо телами получить выражение для проводимости или совершить обратную операцию. Так, например, ёмкость двухпроводной линии (2.33)

$$C = \frac{\pi \varepsilon_a}{\ln \frac{d}{R}}.$$

Для того чтобы получить выражение для проводимости между двумя параллельными проводами (цилиндрами) длиной l , погружёнными в среду с проводимостью γ , надо в соответствии с (2.37) заменить ε_a на γ . Тогда получим

$$G = \frac{\pi \gamma l}{\ln \frac{d}{R}}$$

Или другой пример. Ёмкость коаксиального кабеля (2.34)

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Проводимость между двумя соосными цилиндрами длиной l , которые разделены средой с удельной проводимостью γ , идентифицируется следующим выражением:

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Аналогию можно распространить и на более сложные поля.

Пример 2.8 (экранирование электростатических и магнитных полей). Экранами являются устройства, предназначенные для защиты установок от электромагнитных внешних полей, а также окружающего пространства от полей, создаваемых самой установкой.

Экраны подразделяют на электростатические, магнитные и электромагнитные.

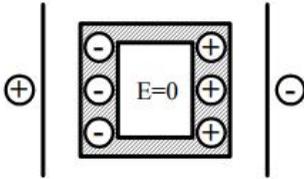
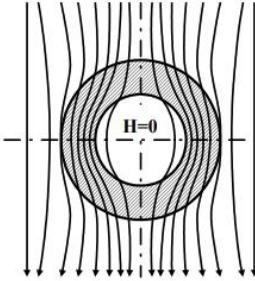


Рисунок 2.17 –
Электростатический
экран

Электростатические экраны основаны на использовании явления электростатической индукции: поле внешних зарядов компенсируется полем вызванных ими зарядов, расположенных на внешней поверхности экрана. Поэтому внутри металлического экрана внешнее поле не проникает (рис. 2.17) (электростатическое поле внутри проводящего тела отсутствует: $E = 0$). Толщина экрана на качество экранирования не влияет

Электростатические экраны применяют при точных измерениях для защиты измерительных установок.

Магнитные экраны предназначены для ослабления, например, внешнего магнитного потока внутри экрана. При экранировании внешнего магнитного поля применяют замкнутые ферромагнитные оболочки из листовых или массивных ферромагнитных материалов. При этом почти все линии внешнего магнитного поля



концентрируются внутри стенок экрана, практически не проникая во внутреннюю область пространства (рис. 2.18). Экранирующее действие тем сильнее, чем больше отношение μ экрана к μ среды внутри экрана.

Рисунок 2.18 –
Магнитный экран

Вопросы для самопроверки

1. Чем отличаются уравнения квазистатических, квазистационарных и стационарных полей от общей системы уравнений Максвелла?
2. Каким образом можно разделить систему уравнений Максвелла на уравнения электрических и магнитных стационарных полей?
3. Какие поля называются потенциальными? В чём заключается физический смысл потенциала и разности потенциалов?
4. Какие основные теоремы и законы электростатики вы знаете?
5. Какие основные законы описывают электрические поля постоянного тока?
6. В чём заключается принципиальное отличие свойств магнитного поля постоянного тока от свойств электрических стационарных полей?
7. Чем отличаются граничные условия электрических и магнитных стационарных полей от общих граничных условий электромагнитного поля?
8. В чём отличие закона Ома в дифференциальной форме от его интегральной формы записи?
9. Чем отличается интегральная и дифференциальная формы записи закона Джоуля – Ленца?
10. В чём отличие закона полного тока от закона Био-Савара-Лапласа?
11. Чем отличается скалярный потенциал магнитного поля φ_m от векторного \vec{A} ?
12. Какие основные свойства и уравнения положены в построение схемы аналогии стационарных полей? При решении каких задач в теории поля применяется аналогия стационарных полей?
13. Для каких элементов электронных цепей применяются понятия ёмкости, индуктивности и взаимной индуктивности? Дайте определения этих параметров.
14. Можно ли из соотношений для электрической и магнитной энергий определить ёмкость и индуктивность?
15. Какие физические принципы используются при электростатическом и магнитном экранировании? Приведите схемы выполнения экранов.

ГЛАВА 3 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Процесс распространения электромагнитного возмущения называется *электромагнитной волной*. Содержание понятия «волновой процесс» нетрудно понять, проанализировав уравнения Максвелла (1.9), (1.10) в дифференциальной форме записи. Предположим, что протекающим в какой-либо среде током проводимости возбуждается вихревое магнитное поле (в соответствии с первым уравнением Максвелла). Если ток изменяется во времени, подобным образом изменяется и магнитное поле, которое возбуждает (в соответствии со вторым уравнением Максвелла) вихревое электрическое поле. Но изменяющееся электрическое поле вызывает ток смещения, который, как и ток проводимости, в свою очередь, приводит к возбуждению вихревого магнитного поля. Таким образом, процесс взаимного возбуждения полей, начавшись, может продолжаться сколько угодно долго во времени и в пространстве при условии отсутствия потерь. Подобные процессы называют *волновыми*.

3.1 Волновые функции и уравнения

Представление о том, что такое волна, распространяющаяся со скоростью v , можно получить, рассматривая для простоты известное в физике одномерное волновое уравнение [9, 10] для некоторой скалярной функции $u(z, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$u(z, t) = C^+ f(z - vt) + C^- f(z + vt), \quad (3.2)$$

где C^\pm – постоянные интегрирования, зависящие от характера изменения волновых полей.

Функции типа $f(z \pm vt)$ математически описывают процессы, которые называют волнами. Функция $f(z - a)$ повторяет вид функции $f(z)$, но сдвинута вправо на величину a .

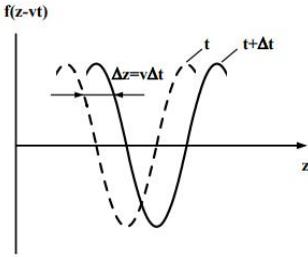


Рисунок 3.1 – К демонстрации поведения волновой функции

На рис. 3.1 изображены две "фотографии" некоторой функции $f(z - vt)$, сделанные через промежуток времени Δt . Они отличаются лишь тем, что все точки второй кривой сдвинуты в сторону больших значений z на величину $\Delta z = v\Delta t$. Поэтому с течением времени вся функция смещается

вправо со скоростью $v = \Delta z / \Delta t$. Применительно к гармоническим волновым процессам, когда может быть введено понятие фазы, эта скорость называется **фазовой** v_ϕ . Легко представить, что функция $f(z + vt)$ описывает волновой процесс, распространяющийся со скоростью v_ϕ в направлении, обратном оси z . Следовательно, слагаемые в выражении (3.2) представляют прямую и обратную волны. Если рассматривать распространение волн по отношению к источнику их возбуждения, то принято использовать термины "падающая" и "отражённая" волны.

Выражение (3.2) описывает так называемые незатухающие волны. Если волна затухает или нарастает в пространстве, вместо постоянных интегрирования C^\pm используют соответствующие координатные функции, которые характеризуют закон её изменения.

В электронной технике обычно имеют дело с гармоническими волновыми процессами, которые описывают гармоническими функциями аргумента $\omega(t \pm z / v_\phi) = \omega t \pm kz$. Здесь $\omega = 2\pi f$ – **круговая частота** временных колебаний; $k = \omega / v_\phi$ – фазовая постоянная распространения или **волновое число**; v_ϕ – фазовая скорость (скорость распространения фронта волны). Эти параметры волны связаны с временным пе-

риодом T и пространственным периодом λ (длина волны) однотипными соотношениями: $\omega = 2\pi / T$, $k = 2\pi / \lambda$, $v_\phi = 2\pi / k$.

Перейдём к рассмотрению основных видов волновых уравнений. Определить структуру и другие характеристики поля, непосредственно используя уравнения Максвелла, затруднительно, поскольку в каждом из них присутствуют по два неизвестных параметра: \vec{H}, \vec{D} и \vec{E}, \vec{B} соответственно. Поэтому для описания поля в однородной линейной среде при отсутствии токов ($\vec{\delta} = 0$) и свободных зарядов ($\rho = 0$) используются однородные волновые уравнения Гельмгольца с одной переменной, а при наличии токов ($\vec{\delta} \neq 0$) и свободных зарядов ($\rho \neq 0$) используются неоднородные волновые уравнения Даламбера.

Уравнения Гельмгольца можно получить из первого и второго уравнений Максвелла в дифференциальной форме записи (1.9), (1.10):

$$\text{rot}\vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} (\vec{\delta} = 0); \text{rot}\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Поддействуем оператором ротора на левую и правую части уравнений:

$$\text{rotrot}\vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot}\vec{E}); \text{rotrot}\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot}\vec{H}).$$

Подставим значения $\text{rot}\vec{E}$ и $\text{rot}\vec{H}$ из вышеприведенных уравнений Максвелла:

$$\text{rotrot}\vec{H} = -\varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_a \vec{H}); \text{rotrot}\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_a \vec{E}).$$

Применив тождество $\text{rotrot}\vec{K} = \text{graddiv}\vec{K} - \nabla^2 \vec{K}$, можно записать

$$\text{graddiv}\vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

$$\text{graddiv}\vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

С учётом того, что $\operatorname{div}\bar{H} = 0$ ($\bar{\delta} = 0$) и $\operatorname{div}\bar{E} = 0$ ($\rho = 0$), а $\varepsilon_a\mu_a$ имеет размерность, обратную квадрату скорости распространения волны, то уравнения Гельмгольца примут вид:

$$\Delta^2 \bar{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.3)$$

В отличие от уравнений Максвелла каждое из полученных дифференциальных уравнений второго порядка зависит только от одной переменной \bar{H} или \bar{E} и в проекциях на оси прямоугольной системы координат запишется в виде трех уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial^2 H_{x,y,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{x,y,z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{x,y,z}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_{x,y,z}}{\partial t^2} = 0.$$

Аналогичным образом запишутся и уравнения для вектора \bar{E} :

$$\frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial t^2} = 0.$$

Воспользовавшись первым и вторым уравнениями Максвелла в комплексной форме записи (1.14), можно получить уравнения Гельмгольца для гармонических колебаний:

$$\nabla^2 \dot{\bar{E}} - p^2 \dot{\bar{E}} = 0; \quad \nabla^2 \dot{\bar{H}} - p^2 \dot{\bar{H}} = 0, \quad (3.4)$$

где $p = j\omega\sqrt{\varepsilon_{ka}\mu_a}$ - коэффициент распространения волны.

Неоднородное волновое уравнение Даламбера для векторного потенциала \bar{A} .

Воспользуемся первым уравнением Максвелла в дифференциальной форме (1.9) и домножим его на μ_a :

$$\mu_a \operatorname{rot} \bar{H} = \mu_a \bar{\delta} + \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

Внесём μ_a под оператор rot , тогда с учётом того, что $\mu_a \bar{H} = \bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}$, получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \mu_a \bar{\delta} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} = \mu_a \bar{\delta} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \quad \begin{array}{l} \text{Применив} \\ \text{тождество} \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{K} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{K} - \nabla^2 \bar{K}, \\ \text{можно записать} \end{array} \quad (3.5)$$

Чтобы перейти от вектора \bar{E} к вектору \bar{A} , воспользуемся вторым уравнением Максвелла (1.10) и выражением магнитной индукции через векторный потенциал (1.5).

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}.$$

Если равны роторы от двух функций, то равны и их функции с точностью до градиента от некоторой скалярной функции (так как $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0$), т.е.

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (3.6)$$

(Это несложно проверить: если на (3.6) подействовать оператором ротора, то получится второе уравнение Максвелла, а для стационарного поля связь $\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi$).

Подставив в (3.6) в (3.5), имеем:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} = \mu_a \bar{\delta} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi \right)$$

или

$$\operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \bar{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \bar{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = \mu_a \bar{\delta}. \quad (3.7)$$

Для перехода от (3.7) к стационарному уравнению Пуассона $\nabla^2 \bar{A} = -\mu_a \bar{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0 \right)$ необходимо выполнение равенства

$$\operatorname{div} \bar{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Последнее выражение называется *калибровкой Лоренца*. Окончательно получаем

$$\nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \bar{\delta}. \quad \text{уравнение Даламбера для векторного потенциала:} \quad (3.9)$$

Уравнение Даламбера для векторного потенциала можно записать через четырёхмерный Лапласиан

$$\left(\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right); \quad \square^2 \bar{A} = -\mu_a \bar{\delta}. \quad (3.10)$$

Неоднородное волновое уравнение Даламбера для скалярного потенциала φ .

Воспользуемся третьим уравнением Максвелла в дифференциальной форме (1.11) и подставим в него значение \bar{E} из (3.6):

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}; \quad \operatorname{div} \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{A}) + \operatorname{grad} \operatorname{div} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

С учётом калибровки Лоренца (3.8) получим уравнение Даламбера для скалярного потенциала, которое также можно записать через четырёхмерный Лапласиан:

$$\square^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

(3.11)

Для большей наглядности сгруппируем полученные волновые уравнения в виде табл. 3.1.

Таблица 3.1 – Волновые уравнения

| Вид уравнения | Электрические составляющие поля | Магнитные составляющие поля |
|---------------|---|---|
| Гельмгольца | $\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0;$ $\square^2 \vec{E} = 0$ | $\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0;$ $\square^2 \vec{H} = 0$ |
| Даламбера | $\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a};$ $\square^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$ | $\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{\delta};$ $\square^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}$ |

Следует также отметить, что уравнения Гельмгольца в основном используются при изучении гармонических волновых процессов в различных средах и направляющих системах, а уравнения Даламбера совместно с уравнениями Максвелла позволяют проанализировать процессы излучения электромагнитных волн антенными устройствами.

3.2 Параметры плоской волны в однородной среде

В качестве самой простой модели электромагнитного волнового процесса рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в однородной среде. Хотя такая модель и является идеализированной, но она позволяет в упрощённом виде изучать общие свойства и параметры электромагнитной волны.

Для описания распространения электромагнитных волн используется понятие **фазового фронта** – поверхности, проходящей через точки с одинаковыми фазами.

Однородной называется волна, имеющая постоянную амплитуду во всех точках фазового фронта.

Волна называется плоской, если её фазовый фронт представляет собой плоскость, перпендикулярную направлению распространения волны.

По форме фазового фронта, кроме плоской волны, различают цилиндрическую и сферическую волны. Волну с цилиндрическим фронтом излучает, например, длинный проводник с током, сферическую – шар. Но вдали от источника электромагнитных колебаний и для ограниченной области пространства с достаточной степенью точности можно считать фронт волны плоским (рис. 3.2).

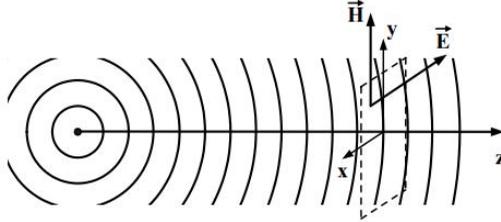


Рисунок 3.2 – Схематическое изображение фронта волны, радиально расходящейся от источника

Поэтому **плоской однородной электромагнитной волной** называется электромагнитное поле, векторные величины которого \vec{E} и \vec{H} в каждый момент времени во всех точках плоскости (xOy) , перпендикулярной направлению распространения волны (ось z), принимают постоянные значения ($\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0$), т.е. \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и зависят только от координаты z и не зависят от x и y . Обычно векторы \vec{E} и \vec{H} изменяются вдоль оси z по гармоническому закону (закону синуса или косинуса).

Определим закон распространения плоской электромагнитной волны, т.е. найдём волновую функцию плоской волны. Для этого решим волновые уравнения Гельмгольца в комплексной форме (3.4), которые для плоской волны запишутся следующим образом:

$$\frac{d^2 \dot{E}}{dz^2} - \dot{p}^2 \dot{E} = 0; \quad \frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} - \dot{p}^2 \dot{H} = 0, \quad (3.12)$$

где \dot{p} - коэффициент распространения;

$$\dot{p} = j\omega\sqrt{\varepsilon_{ka}\mu_a} = \alpha + j\beta; \quad (3.13)$$

α – коэффициент затухания; β – коэффициент фазы.

Решение уравнения Гельмгольца будем искать в виде

$$\dot{E} = E_m e^{kz}. \quad (3.14)$$

В результате подстановки (3.14) в (3.12) получаем характеристическое уравнение

$$k^2 - p^2 = 0,$$

откуда $k = \pm p$. Тогда

$$\dot{E} = E_m^+ e^{-pz} + E_m^- e^{pz} = E_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + E_m^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}. \quad (3.15)$$

Для восстановления действительных значений необходимо выражение для комплексных амплитуд (3.15) умножить на $e^{j\omega t}$ и взять действительную часть, используя тригонометрическую формулу Эйлера

$$\operatorname{Re}(e^{j(\omega t - \beta z)}) = \cos(\omega t - \beta z).$$

В результате получим

$$E = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi^+) + E_m^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi^-). \quad (3.16)$$

Здесь φ^+ и φ^- – фазы волны, зависящие от выбора начала отсчёта. Аналогичные выражения можно получить из второго уравнения (3.12) для H -компоненты поля. Если принять, что на пути распространения волны нет преград, то амплитуды отражённой волны E_m^- , H_m^- – должны равняться нулю и решения для плоской электромагнитной волны примут вид:

$$E = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi^+); \quad (3.17)$$

$$H = H_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \varphi^+).$$

Следует отметить, что для незатухающей волны (отсутствуют потери в среде) графики решений (3.17) будут по характеру идентичны рис. 3.1. Если среда с потерями ($\alpha \neq 0$), то амплитуды гармонических функций будут затухать по экспоненциальному закону $e^{-\alpha z}$.

Основными параметрами, характеризующими распространение электромагнитной волны, являются:

- коэффициент распространения p ;
- коэффициент фазы β ;
- коэффициент затухания α ;
- фазовая скорость v_ϕ ;
- длина волны λ ;
- волновое сопротивление Z_0 ;
- глубина проникновения волны Δ .

Коэффициент распространения p является комплексной величиной, которая характеризует изменение амплитуды и фазы бегущей электромагнитной волны и для плоских однородных волн при заданной частоте ω определяется только параметрами среды (ε_a, μ_a и γ).

Коэффициент распространения p (3.13) в общем виде может быть записан как через коэффициенты затухания и фазы (α, β), так и через тангенс угла потерь ($tg\delta$) с учётом того, что $\varepsilon_{ka} = \varepsilon_a(1 - jtg\delta)$:

$$p = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a(1 - jtg\delta)} = j\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - jtg\delta}. \quad (3.18)$$

Коэффициент фазы β показывает изменение фазы волны при прохождении l м пути и равен мнимой части коэффициента распространения p .

Коэффициент затухания α определяет уменьшение амплитуды волны при прохождении l м пути и равен действительной части коэффициента распространения p .

Найдём α и β из общего выражения для коэффициента распространения (3.18), проделав ряд несложных тригонометрических операций:

$$\left| \dot{p} \right|^2 = \left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu \left(\sqrt{1 + tg^2\delta} \right); \quad (3.19)$$

$$p^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \mu\varepsilon(1 - jtg\delta);$$

$$\operatorname{Re} \left(\dot{p}^2 \right) = \alpha^2 + (j\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu. \quad (3.20)$$

Вычтем и сложим выражения (3.19) и (3.20)

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 - \beta^2) &= 2\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \left(\sqrt{1 + tg^2 \delta} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu = \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \left(\left(\sqrt{1 + tg^2 \delta} \right) + 1 \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\frac{(1 + tg^2 \delta) + 1}{2}}. \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2) &= 2\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \left(\sqrt{1 + tg^2 \delta} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu = \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \left(\left(\sqrt{1 + tg^2 \delta} \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\frac{\left(\sqrt{1 + tg^2 \delta} \right) - 1}{2}}. \quad (3.22)$$

Фазовая скорость v_ϕ – это скорость движения фронта волны постоянной фазы. Фазовая скорость определяется по формуле

$$v_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (3.23)$$

Длина волны λ – расстояние, пройденное волной вдоль её движения за период колебания T (т.е. расстояние, на котором фаза волны изменится на 2π).

$$\lambda = \frac{v_\phi}{T} = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (3.24)$$

Волновое сопротивление Z_ε – это отношение комплексной амплитуды напряжённости электрического поля волны к комплексной амплитуде напряжённости магнитного поля волны.

$$\dot{Z}_\varepsilon = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_{ka}}} = \frac{p}{\gamma}. \quad (3.25)$$

Используя определение волнового сопротивления среды, соотношение (3.17) можно записать в следующем виде:

$$E = E_m e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z);$$

$$H = \frac{E_m}{\left| \dot{Z}_e \right|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \varphi),$$

где $\frac{E_m}{\left| \dot{Z}_e \right|}$ и φ - модуль и фаза комплексного значения волнового со-

противления среды соответственно.

Глубина проникновения волны Δ - расстояние вдоль направления распространения волны, при прохождении которого амплитуда падающей волны (\vec{E} или \vec{H}) ослабевает в $e = 2,72$ раза, т.е.

$$\frac{E e^{-\alpha z}}{E e^{-\alpha(z+\Delta)}} = e = 2,72.$$

Прологарифмируем это выражение и получим $\alpha(z + \Delta - z) = 1$.

Основные параметры волны (3.18), (3.21)-(3.26) в значительной степени определяются типом среды, в которой происходят электромагнитные процессы. На практике условно принято среды подразделять на следующие разновидности в зависимости от их параметров γ и $tg\delta$: **вакуум, идеальный диэлектрик, диэлектрик с малыми потерями** (тефлон, фторопласт, поликор и др. – используется в технике СВЧ), **проводящая среда** (идеальный проводник – теоретический термин).

Рассмотрим кратко параметры волны в перечисленных средах, которые позволяют также определить их свойства для практических приложений.

Вакуум - $\epsilon = 1$; $\mu = 1$; $tg\delta = 0$. При данных параметрах среды из (3.21) - (3.26) следует:

$$\alpha = 0; v_\phi = c; \lambda = \lambda_0 = \frac{c}{f}; Z_{e0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 [\text{Ом}].$$

Из этих соотношений вытекают следующие свойства плоских однородных волн в вакууме:

- отсутствие затухания;
- независимость скорости распространения от частоты;

– равенство скорости распространения волн в вакууме и скорости света;

– волновое сопротивление является константой.

Идеальный диэлектрик - $\epsilon = 1$; $\mu = 1$; $tg\delta = 0$. Основные параметры:

$$\alpha = 0; v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}; \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}}; Z_{\epsilon} = \frac{Z_{\epsilon 0}}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{377}{\sqrt{\epsilon}} [\text{Ом}].$$

Параметры волны аналогичны вакууму с уменьшением в $\sqrt{\epsilon}$ раз.

Диэлектрики с малыми потерями - $\epsilon > 1$; $\mu = 1$; $tg\delta \ll 1$.

Основные параметры волны:

$$\alpha \neq 0; v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}; \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}}; Z_{\epsilon} = \frac{Z_{\epsilon 0}}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{377}{\sqrt{\epsilon}} [\text{Ом}].$$

Так как $tg\delta \ll 1$, то в (3.22) проведём замену $\sqrt{1+tg^2\delta} \approx 1 + \frac{tg^2\delta}{2}$ и

учтем, что $tg\delta = \frac{\gamma}{\omega\epsilon_a}$.

В итоге получим

$$\alpha = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \frac{\lambda Z_{\epsilon}}{2}. \quad (3.27)$$

Таким образом, коэффициент затухания в диэлектрике с малыми потерями зависит от удельной проводимости диэлектрика.

Диэлектрики с малыми потерями широко используются в технике СВЧ (полиэтилен, фторопласт, керамика и др.), имеют значения $tg < 10^{-2}$. Для расчёта основных характеристик поля в этих средах применяются те же соотношения, что и для идеального диэлектрика. Однако за счёт конечности $tg\delta$ в данном случае необходимо учитывать потери.

Проводящая среда - $\epsilon_a \ll \gamma$; $tg\delta \gg 1$, $\neq 1$.

Из соотношения (3.22) с учётом $tg\delta = \frac{\gamma}{\omega\epsilon_a} \gg 1$, следует, что

$$\alpha \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{\frac{tg\delta - 1}{2}} \approx \sqrt{\frac{\omega^2 \epsilon_a \mu_a \gamma}{2\omega\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}}.$$

Аналогично

$$\beta \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{\frac{tg\delta + 1}{2}} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon\mu tg\delta}{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}}.$$

Таким образом, для проводящей среды

$$p = \alpha + j\beta = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}};$$

$$\alpha = \beta = k = \sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}}. \quad (3.28)$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a\gamma}}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \sqrt{\frac{8\pi^2}{\omega\mu_a\gamma}}.$$

Волновое сопротивление

$$\dot{Z}_s = \frac{p}{\gamma} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} e^{j45^\circ}. \quad (3.29)$$

Глубина проникновения поля (3.26)

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_a \gamma}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_a\gamma}}. \quad (3.30)$$

Анализируя соотношения (3.28) – (3.30), можно сделать следующие *выводы* относительно основных свойств электромагнитного поля в проводящей среде:

- коэффициент фазы β и коэффициент затухания α равны между собой;
- реактивная и активная составляющие волнового сопротивления равны между собой;
- вектор \vec{H} отстаёт по фазе от вектора \vec{E} на угол 45° ;
- амплитуда волн вдоль направления распространения быстро уменьшается.

3.3 Поляризация, отражение и преломление электромагнитных волн

Поляризацией плоской волны называется изменение значения и направления вектора напряжённости электрического поля \vec{E} в точке наблюдения за период колебания волны.

Различают три вида поляризации волн:

- линейную;
- круговую;
- эллиптическую.

Поскольку любая электромагнитная волна может быть представлена как наложение (суперпозиция) распространяющихся независимых друг от друга волн, то в зависимости от сдвига фаз φ между ними суммарный вектор напряжённости электрического поля \vec{E} в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, будет описывать прямую при $\varphi = 0^\circ$ (линейная поляризация), окружность при (круговая поляризация) или эллипс при $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ (эллиптическая поляризация).

Для *линейно поляризованной волны* вектор \vec{E} в плоскости, перпендикулярной распространению волны (плоскость xOy), описывает прямую линию (рис. 3.3 а, б).

*Плоскость, в которой происходит изменение амплитуды волны, называется **плоскостью поляризации**. Угол, под которым наклонена плоскость поляризации к горизонтальной оси x , называется **углом поляризации** ψ .*

Для волны с *круговой поляризацией* вектор \vec{E} с течением времени описывает винтовую поверхность с одинаковой амплитудой ($E_{mx} = E_{my}$). В плоскости, перпендикулярной распространению волны (плоскость xOy), вектор \vec{E} описывает окружность (см. рис. 3.3 в).

Для волны с *эллиптической поляризацией* вектор \vec{E} с течением времени описывает эллиптическую винтовую поверхность с различной амплитудой вдоль осей x и y ($E_{mx} \neq E_{my}$). В плоскости, перпендикулярной распространению волны (плоскость xOy), вектор \vec{E} описывает эллипс (см. рис. 3.3 г).

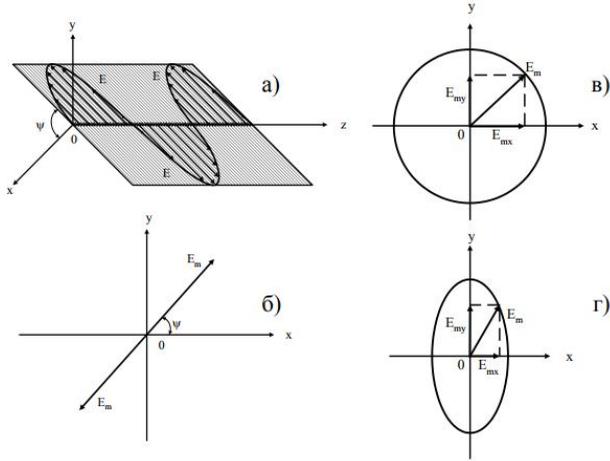


Рисунок 3.3 – Виды поляризации волн:
а, б – линейная; в – круговая; г – эллиптическая

Если вектор \vec{E} в плоскости, перпендикулярной распространению волны, вращается по часовой стрелке, то такая поляризация называется *левой*, если против часовой стрелки – *правой*.

Пример практического определения вида поляризации плоской волны описан в лабораторной работе 3 приложения Б.

Волны на поверхности раздела двух сред в зависимости от их параметров могут либо полностью отражаться, либо, частично отражаясь, преломляться и проходить во вторую среду. В первом приближении (без учёта явления дифракции) поведение волн на поверхности раздела двух сред можно описать исходя из законов лучевой оптики [15] с учётом их поляризации.

Так, например, если электромагнитная волна падает на поверхность раздела двух диэлектриков под углом φ , то часть её отразится, а часть – преломится и будет распространяться во второй среде под углом θ . Согласно **законам Снеллиуса** [16]: *угол падения электромагнитной волны равен углу отражения и отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная, равная отношению показателя преломления n_2 второй среды к показателю преломления n_1 первой среды:*

$$N = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}. \quad (3.31)$$

Интенсивность отражённой волны $\dot{E}_{отр}$ с интенсивностью падающей волны $\dot{E}_{пад}$ связана через *коэффициент отражения* \dot{k}_o :

$$\dot{k}_o = \frac{\dot{E}_{отр}}{\dot{E}_{пад}}. \quad (3.32)$$

Интенсивность преломлённой волны $\dot{E}_{пр}$ с интенсивностью падающей волны $\dot{E}_{пад}$ связана через *коэффициент преломления* \dot{k}_n :

$$\dot{k}_n = \frac{\dot{E}_{пр}}{\dot{E}_{пад}}. \quad (3.33)$$

В случае если вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения и параллелен границе раздела (т.е. плоскость поляризации волны перпендикулярна плоскости падения), то такая волна называется **перпендикулярно поляризованной** (рис. 3.4).

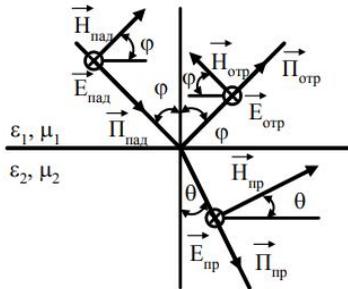


Рисунок 3.4 – Ориентация векторов поля для перпендикулярно поляризованной волны

В случае если вектор \vec{E} лежит в плоскости падения, а вектор \vec{H} перпендикулярен ей и параллелен границе раздела (т.е. плоскость поляризации волны параллельна плоскости падения), то такая волна называется **параллельно поляризованной** (рис. 3.5).

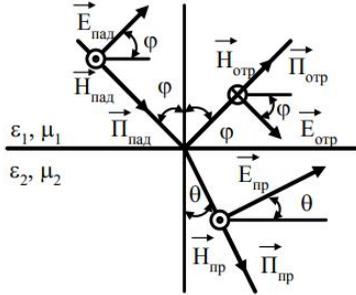


Рисунок 3.5 – Ориентация векторов поля для параллельно поляризованной волны

Рассмотрим случай перпендикулярно поляризованной волны.

Для плоской волны векторы \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны и связаны через волновое сопротивление Z_g следующим образом:

$$\vec{E} = Z_g \vec{H}. \quad (3.34)$$

Согласно граничным условиям $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ (при отсутствии поверхностных токов) и рис. 3.4 можно записать:

$$E_{np} = E_{nad} + E_{omp} \quad \text{или} \quad \frac{E_{np}}{E_{nad}} = 1 + \frac{E_{omp}}{E_{nad}}.$$

Отсюда

$$\dot{k}_n^\perp = 1 + \dot{k}_0^\perp \quad (3.35)$$

С другой стороны

$$H_{nad} \cos \varphi - H_{omp} \cos \varphi = H_{np} \cos \theta.$$

С учётом (3.34)

$$\frac{E_{nad}}{Z_{e1}} \cos \varphi - \frac{E_{omp}}{Z_{e1}} \cos \varphi = \frac{E_{np}}{Z_{e2}} \cos \theta.$$

Поделим обе части этого выражения на E_{nad}

$$\frac{1}{Z_{e1}} \cos \varphi - \frac{E_{omp}}{E_{nad} Z_{e1}} \cos \varphi = \frac{E_{np}}{E_{nad} Z_{e2}} \cos \theta.$$

С учётом (3.32), (3.33) получим:

$$\frac{1}{Z_{e1}} \cos \varphi - \frac{\dot{k}_o^\perp}{Z_{e1}} \cos \varphi = \frac{\dot{k}_n^\perp}{Z_{e2}} \cos \theta.$$

Умножив обе части равенства на (Z_{e1}, Z_{e2}) , и используя выражение (3.35), получим

$$2Z_{e2} \cos \varphi = \dot{k}_o^\perp (Z_{e2} \cos \varphi + Z_{e1} \cos \theta).$$

Откуда коэффициент преломления для перпендикулярно поляризованной волны примет вид:

$$\dot{k}_n^\perp = \frac{2Z_{e2} \cos \varphi}{Z_{e2} \cos \varphi + Z_{e1} \cos \theta}. \quad (3.36)$$

Так как $\dot{k}_o^\perp = \dot{k}_n^\perp - 1$, то коэффициент отражения для перпендикулярно поляризованной волны

$$\dot{k}_o^\perp = \frac{Z_{e2} \cos \varphi - Z_{e1} \cos \theta}{Z_{e2} \cos \varphi + Z_{e1} \cos \theta}. \quad (3.37)$$

Аналогично можно найти коэффициенты отражения и преломления для параллельно поляризованной волны с учётом того, что $H_{np} = H_{над} - H_{отр}$.

Проделав вышеописанную последовательность операций, будем иметь следующие соотношения для коэффициентов преломления и отражения параллельно поляризованной волны:

$$\dot{k}_n^\parallel = \frac{2Z_{e2} \cos \varphi}{Z_{e2} \cos \varphi + Z_{e2} \cos \theta}, \quad (3.38)$$

$$\dot{k}_o^\parallel = \frac{Z_{e2} \cos \theta - Z_{e1} \cos \varphi}{Z_{e1} \cos \varphi + Z_{e2} \cos \theta}, \quad (3.39)$$

3.4 Направляемые электромагнитные волны

Часто в устройствах и системах связи требуется направить электромагнитную волну по заданному пути с минимальными потерями. Для этого используются **направляющие системы**, которые также называются *линиями передачи* или *волноводами*. *Электромагнитная*

волна, распространяющаяся вдоль направляющих систем, называется направляемой.

Так как направляющих систем, которые хорошо функционировали бы во всём диапазоне частотного спектра (рис. 1В), не существует, то для каждого диапазона частот применяются свои направляющие системы, подробное описание которых и их классификация изложены в главе 4.

В простейшем случае волновод может быть выполнен в виде полой металлической трубы прямоугольного или круглого сечения, электродинамические параметры которой определяются путём решения уравнений Максвелла и волновых уравнений.

Рассмотрим *качественную картину* явлений, возникающих при распространении волн в прямоугольном волноводе. Если волна

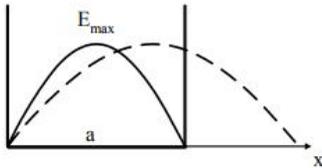


Рисунок 3.5 –
Распределение поля электромагнитной волны в поперечном сечении волновода

гармоническая, то её амплитуда изменяется по закону синуса (косинуса). Максимальную энергию такая волна имеет в крайней верхней и крайней нижней точках гармонической функции. В точках пересечения напряжённости с осью x энергия волны равна нулю (так как $W_y = \frac{\epsilon_a E^2}{2}$). Поэтому ес-

ли поставить металлическую пластину в точке, в которой амплитуда равна нулю (рис. 3.5, сплошная линия), то волна отразится от пластины практически без потерь. Если металлическую пластину поставить в месте, в котором амплитуда волны не равна нулю (пунктирная линия), то на этой пластине выделится энергия $W_y = \frac{\epsilon_a E^2}{2}$ и волна быстро затухнет. Таким образом, между

двумя металлическими пластинами (между стенками волновода) не будут затухать только те волны, амплитуда которых в местах расположения пластин будет равна нулю. Другими словами, в волноводе со стороной a будут существовать только волны, для которых между стенками волновода укладывается целое число полувольт $\lambda/2$, т.е. будут существовать волны, для которых выполняется условие

$$a = q \frac{\lambda}{2},$$

где q – целое число ($q = 1, 2, 3, \dots$).

Волна с длиной полуволны, равной ширине волновода (т.е. при $q = 1$ $a = \frac{\lambda}{2}$), образует стоячую волну и не будет двигаться вдоль оси волновода. Длина такой волны называется **критической** – $\lambda_{кр}$. Волны с $\lambda > \lambda_{кр}$ не будут распространяться в волноводе, поскольку их поле на боковых стенках не будет равным нулю.

Рассмотрим основные параметры волн в направляющих системах.

Критической длиной волны $\lambda_{кр}$ называется предельное значение длины волны, возбуждаемой вибратором в воздухе, при котором распространение волны в волноводе невозможно.

Пусть волна распространяется **в прямоугольном волноводе**. Распространение электромагнитной волны вдоль волновода можно представить как наложение плоских волн, каждая из которых отражается от стенок волновода под углом φ с изменением фазы (рис. 3.6). Как видно из рис. 3.6, суммарная волна распространяется вдоль оси волновода с минимальными значениями в точках B и G , максимальными – в точках D и L .

Длиной волны в волноводе Λ называется расстояние между двумя максимумами или минимумами электромагнитной волны вдоль направления её распространения. Длина волны в волноводе $\Lambda > \lambda$, что следует из рис. 3.6.

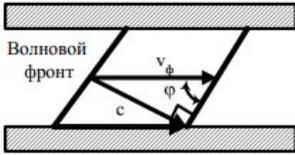


Рисунок 3.7 –
Связь фазовой
скорости с групповой
скоростью

изменяется пропорционально амплитуде низко- частотных сигналов (рис. 3.8). Поэтому **групповая скорость** $v_{гр}$ характеризует скорость распространения сигнала вдоль оси волновода. Хотя скорость распространения электромагнитных волн от стенки до стенки волновода равна скорости света, но групповая скорость

меньше скорости света и зависит от частоты.

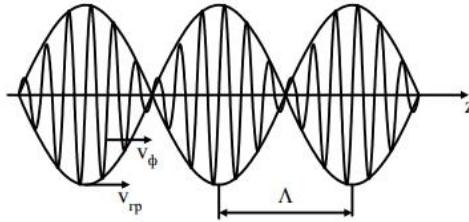


Рисунок 3.8 – Фазовая и групповая скорости

Рассмотрим *количественные соотношения*, определяющие введенные характеристики направляемых волн. Волновые уравнения (3.4) для векторов $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ проекциях на оси координат эквивалентны шести скалярным уравнениям для волноводов без потерь и имеют следующий общий вид:

$$\nabla^2 \dot{\vec{F}} + k^2 \dot{\vec{F}} = 0. \quad (3.40)$$

Здесь под $\dot{\vec{F}}(x, y, z, t)$ надо понимать любую из проекций вектора электрического или магнитного поля на заданную систему координатных осей (декартовую, цилиндрическую или сферическую). Временная зависимость $\dot{\vec{F}}(t)$ определена используемым ранее методом комплексных амплитуд: $\dot{\vec{F}}(x, y, z, t) = \dot{\vec{F}}(x, y, z) \times e^{j\omega t}$. Из проведенного в подразделе 3.2 анализа волновых процессов видно, что поля в волноводе также можно представить в общем виде как суперпозицию рас-

пространяющихся вдоль волновода (ось z) падающих и отражённых волн:

$$\dot{F}(x, y, z, t) = \dot{F}^+(x, y)e^{j(\omega t - Kz)} + \dot{F}^-(x, y)e^{j(\omega t + Kz)} \quad (3.41)$$

В качестве волнового числа здесь для общности надо использовать величину $K \neq k$, т.е. считать, что в волноводе длина волны $\Lambda = 2\pi / K$ в общем случае не равна длине волны $\lambda = 2\pi / k$ в свободном пространстве.

Функции $F^\pm(x, y)$ характеризуют распределение полей в поперечной плоскости волновода и играют роль амплитуды падающей и отражённой волн. Причём эти функции подобны и отличаются только постоянным множителем, так как удовлетворяют одному дифференциальному уравнению. Поскольку для (3.41) $\partial / \partial z = \pm jK$, а $\partial^2 / \partial z^2 = -K^2$, то (3.40) примет вид

$$\nabla_{x,y}^2 F^\pm(x, y) + (k^2 - K^2) F^\pm(x, y) = 0, \quad (3.42)$$

здесь $\nabla_{x,y}^2$ – оператор, включающий в себя производные только по поперечным координатам.

Поскольку фазовая скорость распространения волны в волноводе определяется соотношением $v_\phi = \Lambda f$, то обозначим в (3.42) разность $(k^2 - K^2)$ выражением $(2\pi / \lambda_{kp})^2$, по форме совпадающим с выражением волновых чисел через соответствующие длины волн. Сократив все члены этого равенства на $(2\pi)^2$, получим $1/\lambda^2 - 1/\Lambda^2 = 1/\lambda_{kp}^2$, откуда

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2}}, \quad (3.43)$$

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2}}. \quad (3.44)$$

Чтобы выяснить физический смысл формально введенной величины $\lambda_{кр}$, заменим под корнем отношение длин волн обратным отношением соответствующих частот ($f_{кр} = c / \lambda_{кр}$):

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}, \quad v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}}. \quad (3.45)$$

Второе из этих соотношений показывает, что фазовая скорость зависит от частоты и характеризует закон дисперсии для волновода, представленный графиком на рис. 3.9. Данная зависимость подтверждает полученный качественно вывод о том, что $v_{\phi} > c$. Не менее важным является то, что действительные значения фазовой скорости

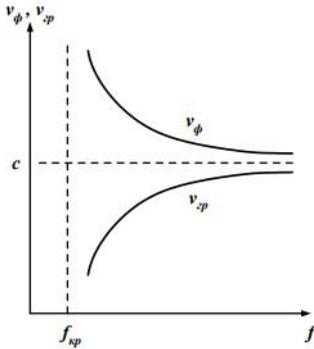


Рисунок 3.9 –
Зависимость фазовой и групповой скоростей от частоты

а значит, и нормальное распространение электромагнитных волн по волноводу возможно лишь для области частот $f > f_{кр}$. Отсюда ясен физический смысл обозначения $f_{кр}$: **критическая частота** – это предельная частота, разделяющая диапазон нормального распространения электромагнитных полей в виде волн и так называемый диапазон отсечки $f > f_{кр}$. Подобный смысл имеет и введенное ранее понятие критической длины волны $\lambda_{кр}$ как некоторое предельное значение длины волны (отсчитанное в свободном пространстве) между указанными диапазонами, но на шкале длин волн. Условие распространения в терминах длин волн формулируется в виде неравенства $\lambda < \lambda_{кр}$, однако длина волны в волноводе иная, чем (на той же частоте) в свободном пространстве; она всегда больше ($\Lambda > \lambda$) и при приближении к критическому режиму стремится к бесконечности.

Энергия вдоль оси волновода передается с групповой скоростью

$$v_{zp} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_{kp}}{f} \right)^2}, \quad (3.46)$$

представленной графиком на рис. 3.9.

Рисунок 3.10 иллюстрирует связь между длиной волны в свободном пространстве $\lambda = c / f$, длиной волны в волноводе $\Lambda = v_{\phi} / f$

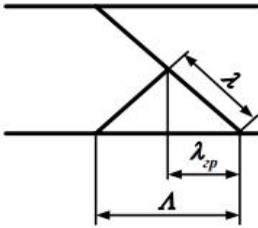


Рисунок 3.10 –
Иллюстрация связи
между λ , Λ и λ_{zp}

и *групповой длиной волны* $\lambda_{zp} = v_{zp} / f$ – расстоянием, на которое перемещается энергия вдоль оси волновода за период колебаний $\Lambda \lambda_{zp} = \lambda^2$ или $v_{\phi} v_{zp} = c^2$. Понимание описанных выше явлений было бы неполным без выяснения особенностей поведения электромагнитных полей в режиме отсечки. Если будем пытаться возбуж-

дать волновод на частоте ниже критической, то в соответствии с (3.45) длина волны, фазовая скорость, а значит, и волновое число в волноводе должны быть мнимыми величинами. Поэтому волновые множители в (3.41) принимают форму $e^{\pm Kz} e^{j\omega t}$, которая показывает, что составляющие поля во всех точках волновода изменяются синфазно во времени, а амплитуда их вдоль волновода убывает экспоненциально. Такое явление нельзя назвать затуханием, так как оно наблюдается в волноводах без потерь, а можно представить как некоторые краевые поля, существующие на некотором расстоянии от места возбуждения, но не способные возбудить бегущую по волноводу электромагнитную волну.

Кроме рассмотренного в данном подразделе явления, дисперсия в волноводе возможна также за счёт потерь в стенках волновода или в заполняющем его диэлектрике подобно тому, как это имело место для случая плоской волны (см. п.3.2).

Возможно ли распространение в волноводах без потерь электромагнитных волн, для которых не наблюдается дисперсия? Формулы (3.43) – (3.46) справедливы, если $(k^2 - K^2) > 0$. Именно это неравенство было исходным для последующих выводов о характере дисперсии в волноводах. Если возможно существование бездисперсионных волн,

то необходимым условием такого является равенство $(k^2 - K^2) = 0$ или $k = K$. Оно означает, что скорость распространения таких волн равна скорости света $v_{\phi} = c$ в среде, заполняющей волновод, и длина волны в волноводе равна длине волны в свободном пространстве ($\Lambda = \lambda$). Эти же равенства получаются, если в (3.43) – (3.46) формально принять $\lambda_{кр} \rightarrow \infty$ или $f_{кр} = 0$. Принимая во внимание физический смысл $f_{кр}$, можно сделать вывод, что волны без дисперсии не имеют режима отсечки, т.е. их распространение в волноводе возможно на любых частотах, включая самые низкие.

О характере полей в волноводе без дисперсии можно судить по выражению (3.42), если в нём принять $k = K$:

$$\nabla_{x,y}^2 \dot{F}^{\pm}(x, y) = 0.$$

Данное выражение по форме совпадает с двухмерным уравнением Лапласа, которому удовлетворяют статические поля. Но так как граничные условия на стенках волновода и для переменных, и для статических полей одинаковы, можно сделать следующие выводы: характер распределения полей в поперечном сечении волновода для волн без дисперсии такой же, как и для статических полей; распространение волн без дисперсии возможно лишь в волноводах, допускающих существование статических полей. К ним относятся такие линии передачи, как коаксиальный волновод, полосковая линия и т.п., имеющие как минимум два проводника и допускающие подключение источника постоянного напряжения.

Поля в **поперечном сечении волновода** рассчитываются путём решения уравнения (3.42). Следует отметить, что функции $F^{\pm}(x, y)$, характеризующие распределение полей, подобны. Поэтому для выяснения их общих закономерностей ограничимся рассмотрением лишь падающей волны. Уравнение типа (3.42) в частных производных удобно решать методом разделения переменных (см. п.5.4). Обозначив $F^{\pm}(x, y) = X(x)Y(y)$ и выполнив процедуру разделения, получим вместо (3.42) два уравнения:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - k_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} - k_y^2 Y = 0. \quad (3.47)$$

Здесь через k_x и k_y обозначены так называемые постоянные разделения, для которых выполняется равенство

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 - K^2$$

и которые иногда называют (по аналогии с k и K) *поперечными волновыми числами*, несмотря на то, что в поперечном направлении распространение волн не происходит.

Решение уравнений (3.50) может быть представлено в виде гармонических функций

$$X(x) = C_x \frac{\sin}{\cos}(k_x x + \varphi_x), \quad Y(y) = C_y \frac{\sin}{\cos}(k_y y + \varphi_y).$$

Двойная запись означает, что, исходя из удобства, можно выбирать любую из функций, пока постоянные интегрирования φ_x и φ_y не определены.

Полученные выражения позволяют записать общий вид решения волновых уравнений для любой из составляющих электрического и магнитного полей в форме

$$\begin{aligned} \dot{F}(x, y, z, t) &= \dot{F}^+(x, y) e^{j(\omega t - Kz)} = \\ &= C^+ \frac{\sin}{\cos}(k_x x + \varphi_x) \frac{\sin}{\cos}(k_y y + \varphi_y) e^{j(\omega t - Kz)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Это выражение показывает, что гармонические изменения напряженности аналогичны полям стоячей волны в поперечном сечении, а в продольном направлении в волноводе существует волновой процесс, характеризующийся продольным волновым числом K . Постоянные интегрирования φ_x и φ_y находят из граничных условий, которые могут быть сформулированы для каждого конкретного волновода (см. главу 4).

Типы волн в волноводах определяются по наличию или отсутствию продольных составляющих полей E_z и H_z . Прделаем вначале некоторые формальные преобразования. Воспользуемся комплексными выражениями уравнений Максвелла в проекциях на оси координат и будем считать для простоты, что в волноводе распространяется только падающая волна. Это не изменит общности выводов, так как функции $\dot{F}^+(x, y)$ и $\dot{F}^-(x, y)$ подобны. Решая эти системы уравнений, получаем следующие выражения для поперечных составляющих полей через продольные [1]:

$$\dot{E}_x = -\frac{j \left(K \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \omega \mu \mu_0 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)}{(k^2 - K^2)}; \quad (3.49)$$

$$\dot{H}_y = -\frac{j \left(\omega \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + K \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)}{(k^2 - K^2)};$$

$$\dot{E}_y = -\frac{j \left(K \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \omega \mu \mu_0 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right)}{(k^2 - K^2)};$$

$$\dot{H}_x = -\frac{j \left(\omega \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - K \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right)}{(k^2 - K^2)};$$

Структура этих выражений однотипна: первое слагаемое в числителе определяется продольной составляющей электрического поля, второе – продольной составляющей магнитного поля. Очевидно, что возможно существование таких структур волн, у которых отсутствует продольная составляющая либо электрического, либо магнитного полей. В частном случае при $k \rightarrow K$ возможно отсутствие обеих продольных составляющих. Соответственно выделяют три основных группы волн: так называемые H -волны, E -волны и T -волны.

1. **H -волны** характеризуются отсутствием продольной составляющей электрического поля ($\dot{E}_z = 0$). Одной из особенностей таких волн является то, что отношение поперечных составляющих электрического и магнитного полей не зависит от координат. Это отношение называется *эквивалентным сопротивлением волновода*, причём

$$Z_3^H = \frac{\left| \dot{E}_\perp \right|}{\left| \dot{H}_\perp \right|} = \frac{\omega \mu \mu_0}{L} = Z_6 \frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{Z_6}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f} \right)^2}}. \quad (3.50)$$

2. *E-волны* характеризуются отсутствием продольной составляющей магнитного поля ($\dot{H}_z = 0$). Эквивалентное сопротивление волновода для этих волн

$$Z_3^E = \frac{\left| \dot{E}_\perp \right|}{\left| \dot{H}_\perp \right|} = \frac{K}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} = Z_6 \frac{\lambda}{\Lambda} = Z_6 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f} \right)^2}. \quad (3.51)$$

3. *T-волны* характеризуются отсутствием обеих продольных компонент поля ($\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$). Для таких волн характерно отсутствие дисперсии ($k = K, v_\phi = c, \Lambda = \lambda$), а эквивалентное сопротивление

$Z_3^T = Z_6 = 377 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, [Ом]. Для *E*- или *H*-волн возможно существование

бесконечного множества их типов. *T*-волны, распределение поперечных полей для которых такое же, как и статических, при заданной конфигурации волновода имеют единственное решение уравнений Лапласа.

Целесообразность проведенной классификации состоит в том, что сравнительно легко можно количественно анализировать лишь отдельные типы волн, а любые сложные гибридные поля можно представить как их суперпозицию. К таким волнам относятся *-волны*

$$\left(\dot{H}_z \neq 0, \dot{E}_z \neq 0 \right).$$

3.5 Излучение электромагнитных волн

Излучением электромагнитных волн называют явление распространения в пространстве электромагнитных волн с конечной скоростью, утративших связь со своими источниками (переменными зарядами и токами). Существование электромагнитного поля вдали от его источников обуславливается взаимной связью переменных магнитного

($\partial \bar{B} / \partial t$) и электрического ($\partial \bar{D} / \partial t$) полей. Первоначальное же возникновение электромагнитного поля зависит от источников поля. Основной задачей расчёта электромагнитного поля излучения является определение структуры поля и его напряжённостей в зависимости от заданного распределения токов и зарядов излучателя. Нахождение соотношений между характеристиками поля и его источника сводится к совместному решению уравнений Максвелла и последующему интегрированию неоднородных дифференциальных уравнений Даламбера (3.9), (3.11).

Предположим, что фронт излучаемой волны является сферическим. Тогда уравнение (3.11), с учётом сферической симметрии, примет следующий вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Решение ищется в виде функции $\frac{f\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}$ и для составляющей потенциала от заряда $\rho(t) dV$, изменяющегося во времени, имеющий вид [1]:

$$\frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{4\pi\varepsilon_a r}.$$

Выражение $\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)$ следует понимать так: объёмный заряд ρ является функцией аргумента $\left(t - \frac{r}{v}\right)$.

Результирующее значение потенциала получим, если просуммируем составляющие потенциала от зарядов, распределенных в объёме V :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_V \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{r}. \quad (3.52)$$

Обсудим решение уравнения (3.9). В общем случае это уравнение можно разбить на три уравнения для трёх проекций вектора потенциала. Каждое из уравнений в проекциях будет составлено отно-

сительно скалярной величины (проекция вектора есть величина скалярная). Общее решение для каждой из проекций проводится точно так же, как проводилось решение для скалярной величины φ , но вместо объёмного заряда будет участвовать соответствующая проекция плотности тока и μ_a вместо $1/\varepsilon_a$.

После умножения решений на соответствующие орты и сложения окажется, что составляющая вектора потенциала от элемента тока $\vec{\delta}dV$ в некоторой точке пространства, удалённой от элемента тока на расстояние r ,

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a \vec{\delta} \left(t - \frac{r}{v} \right) dV}{4\pi r}.$$

Для получения результирующего значения \vec{A} необходимо геометрически просуммировать составляющие от всех элементов тока:

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta} \left(t - \frac{r}{v} \right) dV}{r}. \quad (3.53)$$

Выражения (3.52), (3.53) также можно представить в комплексной форме записи [1] при задании гармонически изменяющегося тока $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Анализ поля излучения обычно проводят, исследуя поле элементарных излучателей. При этом излучающие установки (антенны) рассматривают как совокупность элементарных излучателей. Установка является *излучающей*, если электрическое и магнитное поля распределены в одной и той же области пространства (рис. 3.11).

Электромагнитное поле, создаваемое элементарными излучателями

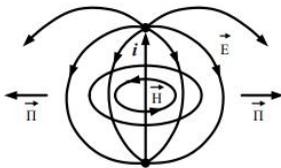


Рисунок 3.11 – Общая картина распределения электрического и магнитного полей в излучающей установке

в окружающей их диэлектрической среде ($\rho = 0$), анализируют с помощью запаздывающих потенциалов (см. пример 3.6). Для гармонических излучателей применяют комплексные изображения. Находят комплекс запаздывающего векторного потенциала \vec{A} , по которому определяют ком-

плексный вектор напряженности магнитного

поля $\dot{\vec{H}} = \text{rot } \dot{\vec{A}} / \mu_a$. Напряжённость электрического поля рассчитывают по уравнению Максвелла $\dot{\vec{E}} = \text{rot } \dot{\vec{H}} / (j\omega\epsilon_a)$.

В качестве примера рассмотрим основные типы излучателей.

Элементарным электрическим излучателем называют отрезок проводника с гармоническим током i , одинаковым по всей длине в любой момент времени, и длиной проводника l , значительно меньшей длины волны λ питающего генератора: $l \ll \lambda$ (см. рис. 3.11). Проводник является линейным, так как его сечение мало по сравнению с длиной. При исследовании поля гармонический ток проводника

$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ заменяют его комплексным изображением \dot{I}_m . Комплексный векторный потенциал $\dot{\vec{A}}$ совпадает по направлению с током, который направлен по оси z . Предполагают, что в поле объёмные заряды отсутствуют ($\rho = 0$).

Электрическим диполем с переменным зарядом

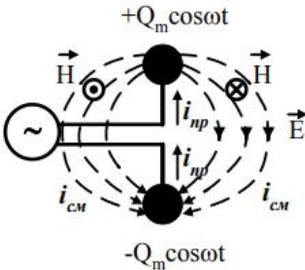


Рисунок 3.12 –
Электромагнитное
поле электрического
диполя

диполь, – равный ему ток смещения. В любой момент времени ток одинаков по всей длине провода ($l \ll \lambda$). Поэтому расчёт поля диполя проводят аналогично расчёту электромагнитного поля, создаваемого элементарным электрическим излучателем.

(диполем Герца) называют отрезок провода, на концах которого помещены металлические шарики (рис. 3.12), образующие сосредоточенные ёмкости. Высокочастотный генератор периодически перезаряжает шарики, изменяя их заряды по гармоническому закону $+Q_m \cos \omega t$ и $-Q_m \cos \omega t$. При этом по отрезку провода, соединяющего шарики, проходит ток проводимости $i = dQ / dt = \pm \omega Q_m \sin \omega t$, а через диэлектрик, окружающий

Элементарный магнитный вибратор представляет собой стержень из материала с большой магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ (например, феррита), на концах которого находятся шары (рис. 3.13)

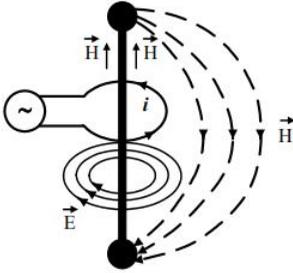


Рисунок 3.13 –
Электромагнитное
поле элементарного
магнитного вибратора

которого находятся шары (рис. 3.13). В качестве возбуждающего устройства обычно используется петля с током проводимости. Принцип работы магнитного вибратора следующий: при протекании переменного электрического тока проводимости по петле в стержне создаётся переменное магнитное поле, которое направлено вдоль стержня. Так как $\mu \gg 1$, то это магнитное поле усиливается ферромагнитным стержнем. Из четвёртого уравнения

Максвелла следует, что силовые линии магнитного поля замкнуты. Поэтому силовые линии магнитного поля, создаваемого в стержне, проходят через шары и замыкаются через воздушное пространство (см. рис. 3.13). Векторы напряжённости электрического поля \vec{E} будут направлены по окружности вокруг ферромагнитного стержня. Шары нужны для постоянства вектора магнитной индукции \vec{B} вдоль стержня. При изменении направления тока изменяется направление магнитного поля в стержне и в воздушном пространстве, т.е. в воздухе создаётся переменное магнитное поле, которое согласно уравнениям Максвелла (1.9), (1.10) и создаст электромагнитное поле.

Элементарный щелевой вибратор представляет собой тонкий металлический лист неограниченных размеров, в котором прорезана щель длиной l и шириной Δ , причём $\Delta \ll l \ll \lambda$ (рис. 3.14).

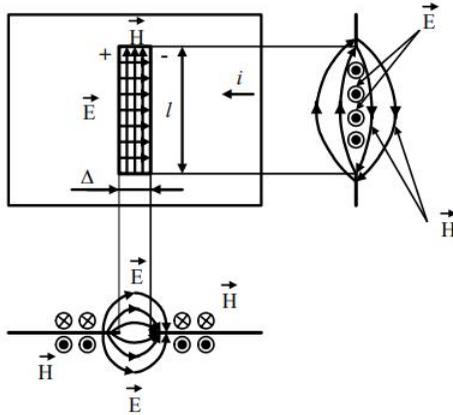


Рисунок 3.14 – Электромагнитное поле элементарного щелевого вибратора

По поверхности такого листа протекает переменный поверхностный электрический ток, создавая на краях щели переменные заряды (переменное электрическое поле). Силовые линии электрического поля \vec{E} щелевого вибратора перпендикулярны плоскости листа и начинаются на одном крае щели (вдоль выреза со стороной Δ), а заканчиваются – на другом (противоположно направлению тока) (см. рис. 3.14). Магнитные силовые линии щелевого вибратора направлены перпендикулярно плоскости листа вдоль выреза со стороной l .

3.6 Примеры анализа волновых процессов

Пример 3.1 (Нормальное падение волн на границу металл-диэлектрик). Если излучающее устройство расположено перпендикулярно к поверхности раздела сред, т.е. $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$ (см. рис. 3.4, 3.5) и независимо от параметров сред падающий, отражённый и преломлённый лучи направлены по одной линии. Коэффициенты отражения и преломления в этом случае, естественно, не будут зависеть от поляризации падающей волны, соотношения (3.36) – (3.39) совпадают и принимают следующий вид:

$$\dot{k}_n = \frac{2Z_{e2}}{Z_{e1} + Z_{e2}}; \dot{k}_0 = \frac{Z_{e2} - Z_{e1}}{Z_{e2} + Z_{e1}}.$$

Из их анализа можно видеть, что значение модуля коэффициента отражения лежит в пределах $0 \leq \left| \dot{k}_0 \right| \leq 1$. Одной из крайних ситуаций

является случай одинаковых сред ($\dot{Z}_{e1} = \dot{Z}_{e2}$), при котором отражение отсутствует, так как фактически отсутствует граница раздела. Полное отражение электромагнитной волны происходит от поверхности идеально проводящей среды ($\gamma \rightarrow \infty, \dot{Z}_{e2} \rightarrow \infty$). В этом случае $\dot{k}_0 = -1$, и амплитуда волны при отражении не изменяется. Знак "-" для коэффициента отражения говорит о том, что фаза волны электрического поля изменяется на 180° , а фаза волны магнитного поля остаётся неизменной. В результате наложения падающих и отражённых волн перед поверхностью отражения образуется так называемая **"стоячая" волна**. Особенности этого явления можно понять, рассматривая выражения (3.15) для случая $\dot{k}_0 = -1$ и для упрощённости $\alpha = 0 \left(\dot{p} = k \right)$. Восстанавливая временной множитель $e^{j\omega t}$ и выделяя действительную часть, получаем:

$$E = 2E_m^+ \sin(kz) \sin(\omega t + \varphi),$$

$$H = 2H_m^+ \cos(kz) \cos(\omega t + \varphi),$$

Данные выражения описывают не волновой процесс, а гармонические колебания, фаза и амплитуда которых зависят от продольной координаты. Мгновенные «фотографии» этих колебаний, сделанные через промежутки времени $T/8$, изображены на рис. 3.17 а и напоминают колебания струны. В пределах одного полупериода колебания происходят синфазно, но амплитуда их в разных точках различна.

| | | |
|------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| Мгновенные | Распределение | Распределение |
| Значения ($\dot{k}_0 = 0$) | амплитуд ($\dot{k}_0 = -1$) | амплитуд ($\dot{k}_0 = -0,5$) |

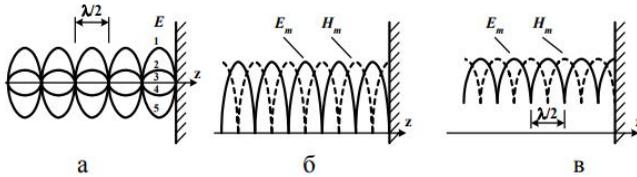


Рисунок 3.17 – Иллюстрация мгновенных значений колебаний при нормальном падении волны на границу диэлектрик – металл

Распределение амплитуды, нормированной к амплитуде падающей волны, показано на рис. 3.17 б, в. Характерной особенностью является наличие «узлов», т.е. точек с нулевой амплитудой, и «пучностей», где амплитуда максимальна и вдвое превышает амплитуду падающей волны. Причём положение этих точек в пространстве неизменно, что и объясняет используемое название – стоячая волна. Причину такой ситуации понять нетрудно – узлы образуются в точках, где падающая и отражённая волны встречаются в противофазе. Для электрического поля «узлы» расположены на расстояниях, кратных полуволне, так как на этих расстояниях «набег» фазы при прохождении волны вперёд и обратно составляет целое число периодов, а противофазность обеспечивается сдвигом фазы на 180° при отражении. Поскольку для магнитного поля фаза при отражении не меняется, то в тех же точках падающая и отражённая магнитные волны будут встречаться синфазно и образовывать «пучности». Легко представить, что между двумя соседними «узлами» будут расположены «пучности» электрического и «узлы» магнитного полей.

Подобное явление наблюдается и при неполном отражении, когда $\left| \frac{\dot{k}_0}{k_0} \right| < 1$. В этих ситуациях перед плоскостью отражения будет образовываться стоячая волна (рис. 3.17 в), однако амплитуда колебаний в

«пучностях» будет не в два, а в $z = 1 + \left| \frac{\cdot^0}{k_0} \right|$ раза превышать амплитуду падающей волны, а в «узлах» – пропорциональна $1 - \left| \frac{\cdot^0}{k_0} \right|$.

Пример 3.2 (Наклонное падение волны на границу диэлектрик – металл). Рассмотрим качественную картину явлений, возникающих при наклонном падении плоской электромагнитной волны на идеально проводящую поверхность. На рис. 3.18 прямыми линиями показаны фронты волны, соответствующие «гребням» и «впадинам». На основе принципа суперпозиции такую волну можно представить как сумму нормально падающей волны и волны, распространяющейся параллельно поверхности. Нормально падающая волна будет испытывать полное отражение, в результате чего образуется стоячая волна с «узлами» и «пучностями», чередующимися в направлении, перпендикулярном к поверхности. В продольном направлении электромагнитное поле будет распространяться как бегущая волна, причём её длина, отсчитываемая вдоль поверхности, $\Lambda = \lambda / \sin \varphi$. Соответственно фазовая скорость $v_\varphi = c / \sin \varphi$ и превышает скорость света для данной среды. В предельном случае нормального падения ($\varphi \rightarrow 0$) длина волны и фазовая скорость будут иметь бесконечно большое значение.

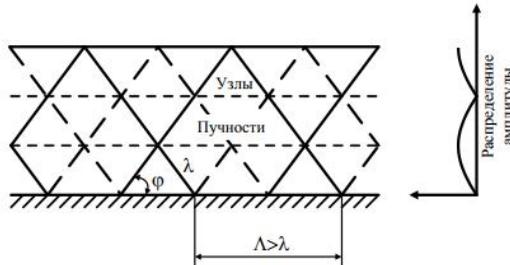


Рисунок 3.18 – Иллюстрация волновых явлений при наклонном падении волны на проводящую поверхность

Пример 3.3 (Скин-эффект и его применение).

Проанализируем соотношение (3.30), определяющее глубину проникновения поля в проводящую среду:

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \gamma}}.$$

Видно, что глубина проникновения Δ зависит от свойств проводящей среды (μ_a, γ) и частоты ω . В частности, для металлов удельная проводимость γ высока, следовательно, глубина проникновения Δ очень мала (несколько микрометров). Для идеального проводника $\gamma \rightarrow \infty$ и глубина проникновения электромагнитного поля равна нулю. Поэтому можно считать, что энергия электромагнитного поля при попадании на поверхность металлического проводника выделяется в тонком поверхностном слое и сильно поглощается этим слоем.

*Явление сильного поглощения электромагнитного поля тонким поверхностным слоем проводника называется **скин-эффектом**, а слой, в котором происходит поглощение, называется скин-слоем.*

Скин-эффект **применяется** при построении электромагнитных экранов и в электрофизических установках по нагреву поверхности проводников. Толщина металлического экрана должна быть не меньше длины электромагнитной волны внешнего поля, так как на расстоянии длины волны от поверхности экрана электромагнитная волна практически полностью затухает и не проникает в пространство, ограждённое экраном.

На низких частотах (например, $f = 50$ Гц) электромагнитные экраны выполняют из ферромагнитных материалов, длина электромагнитной волны в которых меньше, чем в медных или алюминиевых материалах при одной и той же частоте. На радиочастотах экраны из ферромагнитных материалов не применяют из-за больших потерь в них. Длина волны в меди, алюминии и других хорошо проводящих материалах может быть меньше 1 мм, поэтому экраны из таких материалов имеют незначительную толщину стенок. Основные принципы построения экранов изложены в [14].

Разогрев поверхности проводников электромагнитным полем используется для получения на их поверхности твёрдых закалённых или мартенситных фаз, позволяющих в несколько раз увеличить ресурс работы металлических изделий.

Пример 3.4 (Распространяющиеся и нераспространяющиеся поля в волноводе). Проанализируем физический смысл введённого в п.3.4 понятия критической длины волны (критической частоты). Так как x, y и z – независимые переменные, то одномерное волновое

уравнение, описывающее зависимость векторов \vec{E} и \vec{H} от продольной координаты, в соответствии с (3.42) будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2 F^\pm}{dz^2} - (K^2 - k^2) F^\pm = 0. \quad (3.54)$$

Это уравнение имеет решение

$$F(z) = Ae^{-pz} + Be^{pz}, \quad (3.55)$$

где A и B – постоянные интегрирования;

$$p = \sqrt{K^2 - k^2}. \quad (3.56)$$

Из (3.56) следует, что в зависимости от соотношения между K и k значение p может быть либо вещественным, либо мнимым, либо равным нулю.

Полагая в общем случае $p = \alpha + j\beta$ и учитывая связь между векторами \vec{E}, \vec{H} и функцией F , любую составляющую векторов поля в волноводе можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}^+(x, y) e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \dot{E}^-(x, y) e^{\alpha z} e^{j\beta z}, \\ \dot{H} &= \dot{H}^+(x, y) e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \dot{H}^-(x, y) e^{\alpha z} e^{j\beta z}. \end{aligned}$$

Рассмотрим физический смысл слагаемых в (3.57). Первые слагаемые описывают электромагнитное поле, распространяющееся в положительном направлении оси z , на что указывает множитель $\exp(-j\beta z)$. Такое поле называют прямой (*падающей*) волной. Вторые слагаемые описывают поле, распространяющееся в отрицательном направлении оси z . Такое поле называют *обратной (отражённой)* волной. Свойства падающих и отражённых волн идентичны, поэтому ограничимся изучением только падающих волн. Очевидно, что в выражениях (3.57) по аналогии с плоской волной (п.3.2) α – коэффициент затухания, β – коэффициент фазы, p – коэффициент распространения.

Исследуем характер распределения поля вдоль волновода при различных соотношениях между K и k . Для этого перейдем к вещественной форме записи соотношений (3.57), ограничившись случаем прямых волн:

$$\begin{aligned} E &= |E_n^+(x, y)| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_1), \\ H &= |H_n^+(x, y)| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_2), \end{aligned}$$

(3.58)

где φ_1, φ_2 – начальные фазы компонент поля. В зависимости от соотношения между K и k возможны три случая (подчеркнём, что K и k – вещественные числа).

Случай 1 – распространяющиеся поля. Пусть $k > K$. При этом согласно (3.56)

$$p = j\sqrt{k^2 - K^2} = j\beta, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \sqrt{k^2 - K^2}. \quad (3.59)$$

Для рассматриваемого случая согласно (3.58)

$$E = \left| \dot{E}^+ \right| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_1), \quad H = \left| \dot{H}^+ \right| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_2).$$

Из полученных выражений следует, что поле в волноводе представляет собой распространяющуюся без затухания волну. С течением времени t волна перемещается в положительном направлении оси z . Фаза поля линейно зависит от z , фронтом волны является плоскость $z = \text{const}$, перпендикулярная оси волновода.

Случай 2 – нераспространяющиеся поля. Пусть $k < K$
При этом

$$p = \sqrt{K^2 - k^2} = \alpha, \quad \beta = 0.$$

$$\begin{aligned} E &= \left| \dot{E}^+ \right| e^{-\alpha z} \cos(\omega t + \varphi_1), \\ H &= \left| \dot{H}^+ \right| e^{-\alpha z} \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Выражения для} \\ \text{полей в волноводе} \\ \text{принимают вид} \end{array} \quad (3.60)$$

Согласно (3.60) с течением времени t поля не перемещаются вдоль оси z . Отсутствие зависимости фазы от z указывает на то, что рассматриваемое поле не является волной, распространяющейся вдоль оси z волновода. Поле колеблется между боковыми стенками волновода. Нетрудно показать, что в данном случае продольная составляющая среднего за период колебания значения вектора Пойнтинга волны в волноводе отсутствует, т.е. мощность вдоль оси волновода полем не переносится. Такие волны называются *местными* или *нераспространяющимися*. Экспоненциальное уменьшение амплитуды этих волн с

увеличением z можно объяснить интерференцией между волнами, отражающимися от стенок волновода.

Случай 3 – Пусть $K = k$. Значит, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, что соответствует переходу от распространяющихся волн к нераспространяющимся и наоборот. Тогда E - и H - волны в любом волноводе могут быть либо распространяющимися, либо нераспространяющимися. Принадлежность к тому или иному типу определяется соотношением между K и k .

Частота, определяемая из условия $K = k = \omega_{кр} \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = 2\pi f_{кр} \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$, является критической:

$$f_{кр} = \frac{K}{2\pi \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}. \quad (3.61)$$

Соответствующая данной частоте критическая длина волны

$$\lambda_{кр} = \frac{v}{f_{кр}} = \frac{2\pi}{K}, \quad (3.62)$$

где $v = 1/\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ – скорость электромагнитной волны в среде с параметрами ε_a и μ_a , соответствующими параметрам диэлектрического заполнения волновода. Из (3.61) и (3.62) вытекает, что условие распространения волны в волноводе ($k > K$) можно представить как

$f > f_{кр}$ ($\lambda < \lambda_{кр}$). Следовательно, *критической длиной волны называется такая длина волны электромагнитного поля в неограниченном свободном пространстве, имеющем те же параметры, что и диэлектрик волновода, при которой происходит переход от распространяющегося поля к нераспространяющемуся и наоборот.*

Поскольку каждый конкретный волновод имеет свой спектр значений K , то он имеет и свой спектр критических длин волн (критических частот). Так как значения K в заданном волноводе представляют собой дискретный ряд вещественных чисел, начинающихся с минимального значения K_1 и возрастающих до бесконечности, то значения $\lambda_{кр}$ также представляют собой множество дискретных вещественных чисел, начинающихся от максимального значения $\lambda_{кр1}$ и убывающих до нуля, а значения $f_{кр}$ представляют собой ряд дискретных чисел,

аналогичный K (рис. 3.19). Как видно из рис. 3.19, при заданной частоте (длине волны в свободном пространстве) в волноводе существует конечное число распространяющихся полей, для которых $f > f_{кр}$ ($\lambda < \lambda_{кр}$), и бесконечное число нераспространяющихся полей, для которых $f < f_{кр}$ ($\lambda > \lambda_{кр}$).

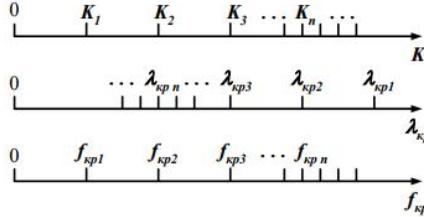


Рисунок 3.19 – Диаграмма дискретных значений K , $\lambda_{кр}$ и $f_{кр}$

При выполнении условия

$$f_{кр1} < f < f_{кр2} \left(\lambda_{кр1} < \lambda < \lambda_{кр2} \right) \quad (3.63)$$

в волноводе будет распространяться только одна волна, у которой $f_{кр} = f_{кр1}$ ($\lambda_{кр} = \lambda_{кр1}$). Эта волна имеет минимальную критическую частоту (максимальную критическую длину волны) и называется *основной* волной. Соотношение (3.63) называют *условием единственности* основной волны.

Как правило, передача энергии по волноводу производится на основной волне с выполнением условия её единственности. Если помимо основной волны возможно распространение и некоторых высших типов волн, то между всеми волнами возникает взаимодействие, приводящее к искажению передаваемого сигнала. Наряду с этим затрудняется согласование волновода с нагрузкой, поскольку для различных типов распространяющихся волн, возбуждаемых на одной и той же частоте генератора, такие их характеристики, как длина волны в волноводе, фазовая скорость и другие, различны. Согласно (3.61) критическая частота, являясь характеристикой волновода, зависит от формы и размеров контура поперечного сечения волновода, типа волны (от

данных характеристик зависит K) и проницаемостей ε_a и μ_a среды, заполняющей волновод.

Чем больше значения ε_a и μ_a , тем меньше $f_{кр}$. Следовательно, с ростом ε_a и μ_a условие распространения заданной волны выполняется на более низких частотах. Подобное обстоятельство в ряде случаев используется для уменьшения поперечных размеров волновода при работе на заданной частоте f .

Так как для T -волн $K = 0$, то $\lambda_{крT} = \infty$ ($f_{крT} = \infty$). Это означает, что T -волна всегда является основной (если она вообще существует в данном волноводе) и распространяющейся.

Пример 3.5 (запаздывающие потенциалы). Обсудим, в чём состоит физический смысл подынтегральных выражений в (3.52) и (3.53):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_V \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{r}; \quad \vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta}\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{r}.$$

Электромагнитная волна распространяется со скоростью v . Расстояние r она пройдёт за время r/v . Поэтому значение составляющей потенциала φ в переменном электромагнитном поле в некоторой точке, удалённой от заряда на расстояние r в момент времени t , определяется значением заряда в момент времени $\left(t - \frac{r}{v}\right)$.

Точно так же следует понимать и выражение для \vec{A} .

В силу конечной скорости распространения электромагнитной волны значение вектора-потенциала от элемента тока $\vec{\delta} dV$ в точке, удалённой от элемента тока на расстояние r , изменяется с запаздыванием во времени на величину r/v . Поэтому потенциалы переменного электромагнитного поля называют *запаздывающими потенциалами*.

Запаздывание объясняется тем, что электромагнитная волна проходит расстояние r до точки наблюдения не мгновенно, а с конечной

скоростью $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Вопросы для самопроверки

1. Какой физический смысл волновой функции?
2. В чём отличие волновых однородных уравнений Гельмгольца от неоднородных волновых уравнений Даламбера?
3. Каким образом из уравнений Гельмгольца можно получить уравнения плоской волны в однородной среде?
4. Чем отличаются параметры плоской волны в диэлектрике от её параметров в проводящей среде?
5. Чем отличается линейная поляризация волны от круговой и эллиптической?
6. В чём заключается отличие распространения волн в однородной среде и на поверхности раздела двух сред?
7. Какими физическими факторами обусловлено явление скин-эффекта и для каких целей оно применяется?
8. В чём отличие направляемых электромагнитных волн от волн в однородной среде?
9. Какой физический смысл критической длины волны (частоты)?
10. Чем отличаются фазовая и групповая скорости волн?
11. Какие основные типы волн в направляющих системах могут распространяться?
12. Какие режимы существования полей возможны в волноводе?
13. В чём заключаются основные принципы излучения электромагнитных волн?
14. Чем отличаются элементарные электрические и магнитные излучатели?
15. Какой физический смысл термина «запаздывающие потенциалы»?

Библиографический список

1. Кудряшов Ю.Б. Радиационная биофизика. Радиочастотные и микроволновые электромагнитные излучения [Электронный ресурс]: учебник / Кудряшов Ю.Б., Перов Ю.Ф., Рубин А.Б. — Электрон. текстовые данные. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 184 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/12982>. — ЭБС «IPRbooks», по паролю.

2. Основы электромагнитной совместимости: учебник / М-во образования и науки РФ; ред. Р. Н. Карякин. - Барнаул: Изд-во Алтайского полиграфического комбината, 2007. - 480 с. - ISBN 978-5-903387- 07-6

3. Строительные материалы для защиты объектов от воздействия электромагнитных излучений / В. Н. Гульбин [и др.] // Промышленное и гражданское строительство. - 2014. - № 5. - С. 7-13.